Soluzione di Adriana Lanza

Sia f la funzione definita su R da $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}$ e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento Oxy.

1.Si determini il limite di f(x) per x che tende a $+\infty$ *e a* $-\infty$. Si calcoli f(x)+ f(-x) e si spieghi perché dal risultato si può dedurre che il punto A(0;1+ln4) è centro di simmetria di Γ .
2.Si provi che, per tutti i reali m, l'equazione f(x)=m ammette una e una sola soluzione in R
Sia α la soluzione dell'equazione f(x)=3 ; si determini un intervallo di ampiezza 10^{-2} che contenga α. Per quale valore di m il numero -α è soluzione dell'equazione f(x)=m?
3. Si mostri che per tutti gli x reali è: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x+1}$. Si provi che la retta r di equazione $y = x + \ln 4$ e la retta s di equazione $y = x + 2 + \ln 4$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s.

4. Si consideri l'integrale I(β)=

$$\int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4]dx$$

E si calcoli

$$\lim_{\beta \to +\infty} I(\beta)$$

Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto?

1) Tenendo conto del fatto che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0 \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^x+1} = 2$$

Possiamo dedurre che

$$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

$$f(x) + f(-x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1} - x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x}+1} = 2\ln 4 + 2\left(\frac{1}{e^x+1} + \frac{e^x}{e^x+1}\right) = 2\ln 4 + 2 \rightarrow$$

$$\mathbf{\frac{f(x) + f(-x)}{2} = 1 + \ln 4}$$

Questo risultato prova che :

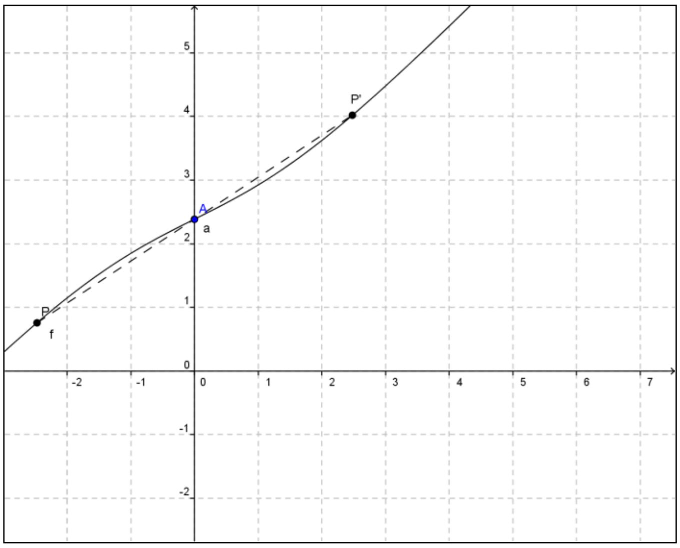
Dati i due punti P(x, f(x)) e P'(-x; f(-x)), appartenenti quindi a Γ, il loro punto medio

$$\begin{cases} \dfrac{x - x}{2} \\ \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{cases}$$

Soluzione di Adriana Lanza

coincide con A, qualunque sia x.

La figura seguente definisce un'interpretazione grafica del risultati



P (x,f(x)) e e P'(-x;f(-x)) si corrispondono in una simmetria di centro A

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2 + 2\ln 4 - y \end{cases}$$

2) f(x) è continua in R ed assume tutti i valori in R

Per verificare che li assume una volta sola osserviamo che

$f'(x) = \frac{e^{2x}+1}{(e^{x}+1)^2}$ è sempre positiva ,pertanto **f(x) è monotona crescente.**

<u>Sia g(x)= f(x)-3</u>

g(x) cambia segno tra 1,12 e 1,13 →**1,12<α<1,13**

Se

f(α)= 3

f(-α)= m

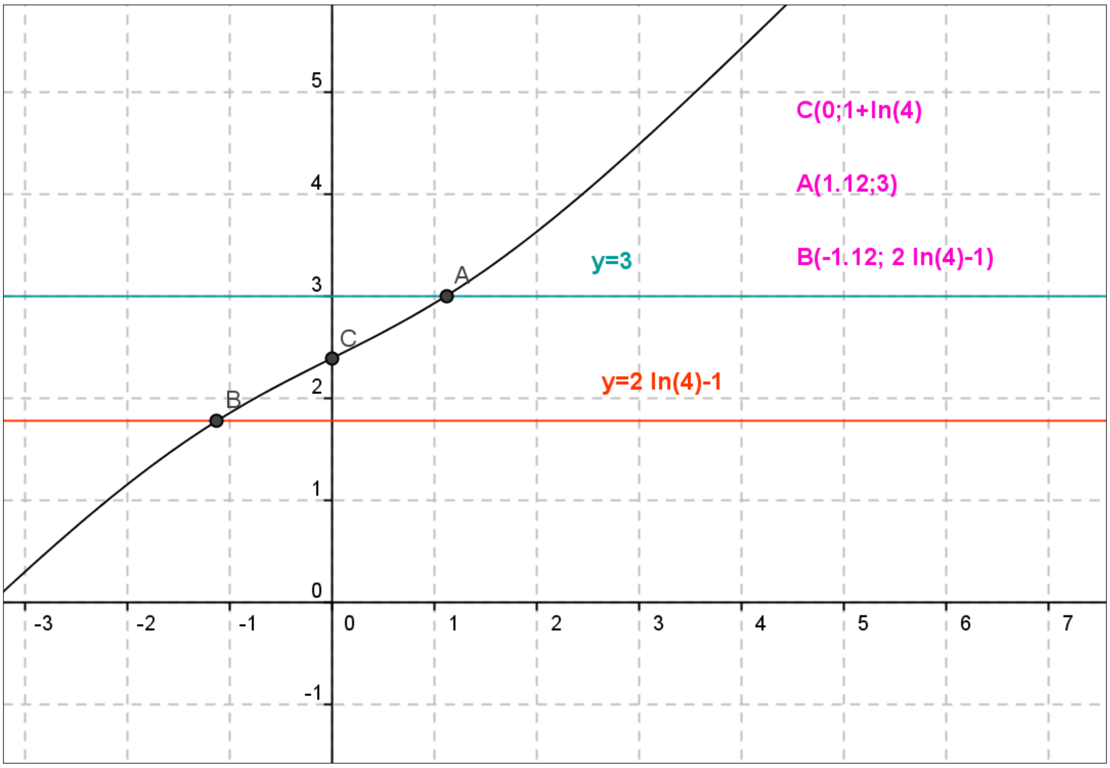
sommando membro a membro si ottiene

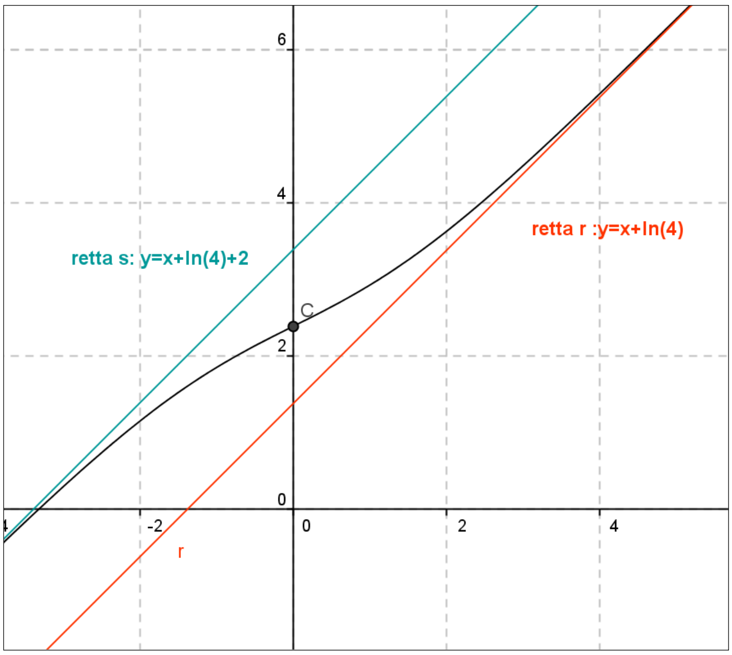
Soluzione di Adriana Lanza

f(α)+ f(-α)= m+3

poiché f(α)+ f(-α) =$2\ln 4+2$

$$m=2\ln 4-1$$





3) Poiché

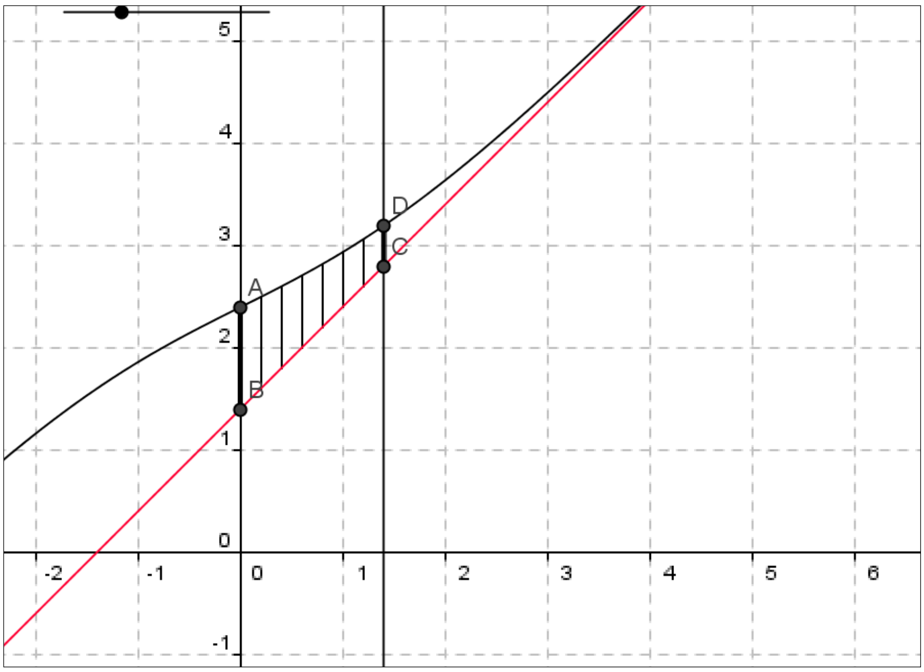
$$\frac{2}{e^x+1}=2\frac{1+e^x-e^x}{e^x+1}=2-\frac{2e^x}{e^x+1}$$

$$f(x)=x+2+\ln 4-\frac{2e^x}{e^x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-r(x)\big)=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{2e^x}{e^x+1}\right)=0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-s(x)\big)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{2e^x}{e^x+1}=0^-$$

Questo prova che la retta r di equazione $y=x+\ln 4$ e la retta s di equazione $y=x+2+\ln 4$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s.



4) $\mathbf{I}(\beta)$

rappresenta il valore della parte di piano limitata da Γ, da r , dall'asse y e dalla retta di equazione x=β

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta}) = \int_0^{\beta} [f(x) - x - \ln 4]dx = \int_0^{\beta} [2 - \frac{2e^x}{e^x + 1}]dx = [2x - 2\ln(e^x + 1)]_0^{\beta} =$$

$$2\beta - 2\ln(e^{\beta} + 1) + 2\ln 2 = 2\ln e^{\beta} - 2\ln(e^{\beta} + 1) + 2\ln 2 = \mathbf{2\ln\frac{2e^{\beta}}{e^{\beta}+1}}$$

$$\lim_{\beta\to+\infty} \frac{2e^{\beta}}{e^{\beta} + 1} = \lim_{\beta\to+\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{e^{\beta}}} = 2$$

Pertanto $\mathbf{\lim_{\beta\to+\infty} \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta})=4}$

Il significato geometrico del risultato è: la regione di piano (illimitata) compresa tra l'asse y, la curva Γ e il suo asintoto r, ha valore finito, uguale a 4