Soluzione di Adriana Lanza

PROBLEMA N .2

Sia f la funzione definita su R da $f(x) = (ax+b)e^{\frac{-x}{3}} + 3$ dove a e b sono due reali .

1. Si determinino a e b sapendo che f ammette un massimo nel punto di ascissa 4 e che f(0)=2
2. Si studi su R la funzione $f(x) = (x-1)e^{\frac{-x}{3}} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy..
3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta y=3.
4. Il profitto di un'azienda , in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che renda spiegazione del fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione g definita su R^+ se per ciascun x_i si ha : $|g(x_i)-y_i|\leq 10^{-1}$se per ciascun x_i , oggetto dell'osservazione,si ha : $|g(x_i)-y_i|\leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica , giustificando la risposta, se è vero che , in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori a 3 milioni di euro.

1)Imponendo le condizioni :

- f(0)=b+3=2→b=-1

Si può supporre a≠0, altrimenti il grafico ha lo stesso andamento di una funzione esponenziale e non può ammettere un massimo .

Dallo studio della derivata prima

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(ax-1)e^{\frac{-x}{3}} + axe^{-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3}e^{\frac{-x}{3}}(ax-3a-1)$$

Si deduce che nel punto di ascissa $\frac{3a+1}{a}$ la funzione ha un estremo relativo

Imponendo

- $\frac{3a+1}{a} = 4$

Si trova a =1

2)$f(x) = (x-1)e^{\frac{-x}{3}} + 3$

Funzione definita e continua in R

Soluzione di Adriana Lanza

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ $\qquad f(0) = 2$

$f'(x) = -\frac{1}{3}e^{\frac{-x}{3}}(x-4)$

La funzione è crescente per x<4 e decrescente per x>4

Il punto M di ascissa 4 è massimo relativo e anche assoluto. La sua ordinata è $3(e^{-\frac{4}{3}}+1) \cong 3.8$

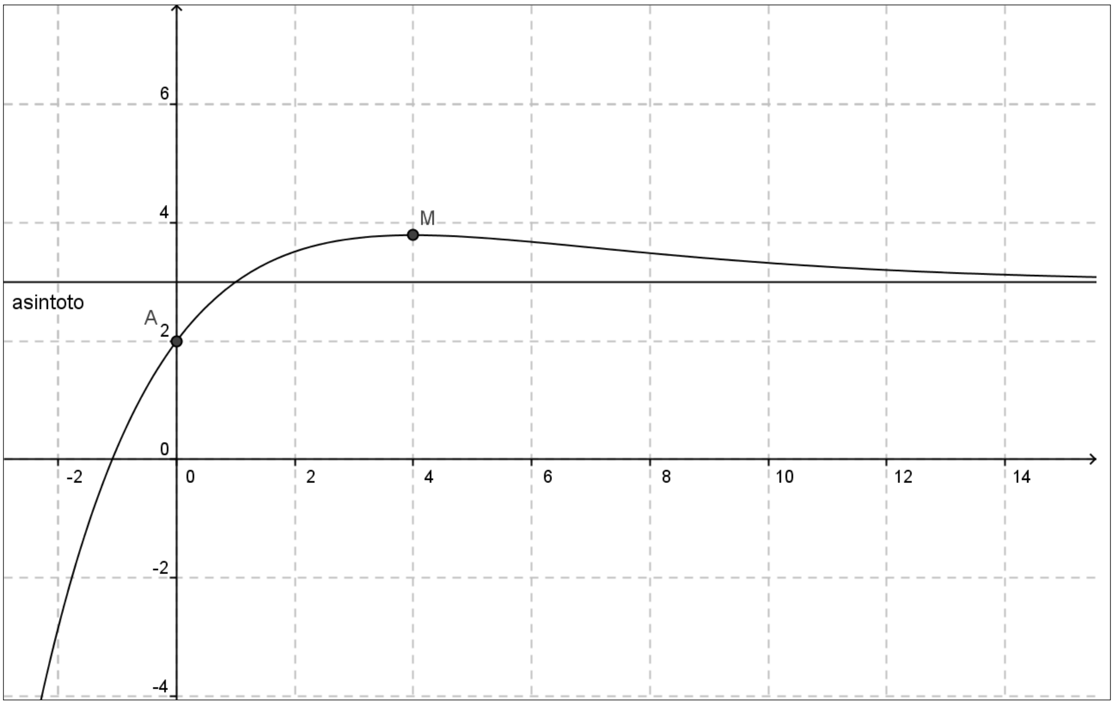
La retta y=3 è asintoto orizzontale destro ed incontra la curva solo nel punto (1;3)

Al tendere di x a +∞ la curva si accosta asintoticamente alla retta mantenendosi al di sopra di essa.

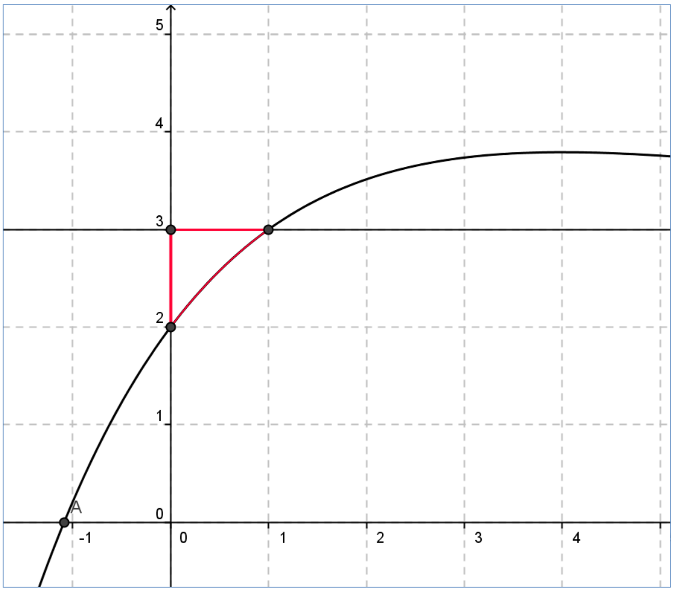
$$f''(x) = \frac{1}{9}e^{\frac{-x}{3}}(x-7)$$

La curva volge la concavità verso l'alto per x>7 , volge la concavità verso il basso per x<7

Il punto di ascissa 7 è un flesso



Soluzione di Adriana Lanza



3) Area: $\int_0^1 (3 - f(x))dx$

$\int_0^1 [(1-x)e^{-\frac{x}{3}}]dx = [(x+2)3e^{-\frac{x}{3}}]_0^1 = 9e^{-\frac{1}{3}} - 6$

AREA $\cong 0.45$

Calcolo dell'integrale indefinito:

$$\int [(1-x)e^{-\frac{x}{3}}]dx$$
$$= -3(1-x)e^{-\frac{x}{3}}$$
$$- 3\int e^{-\frac{x}{3}}dx = 3(x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 9e^{-\frac{x}{3}}$$
$$= 3e^{-\frac{x}{3}}(x+2)$$

4)

Costruiamo la tabella

x	y(x)	f(x)	scarto
0,00	1,97	2,00	0,03
1,00	3,02	3,00	0,02
2,00	3,49	3,51	0,02
3,00	3,71	3,74	0,03
4,00	3,80	3,79	0,01
5,00	3,76	3,76	0,00
6,00	3,65	3,68	0,03

$f(x)$ è accettabile.

Dalla posizione della curva rispetto all'asintoto si deduce che l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori a 3 milioni di euro, a meno di un'incertezza di 0,1 milioni di euro

Seconda tabella

Numero d'ordine	f(x)	**f(x)-0,1**
14,00	3,12	3,02
15,00	3,09	2,99
16,00	3,07	2,97