

PROBLEMA 2 PNI

Per il progetto di una piscina , un architetto si ispira alle funzioni **f** e **g** definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \quad e \quad g(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$$

1. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy . Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo [-10;10] e se ne indichino le coordinate.
2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo [0;4]. Si calcoli l'area di R.
3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette y=-15 e y=-5, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti limitandosi, nel caso delle intersezioni con la retta y=-5, a valori approssimati a meno di 10^{-1} .
4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y , la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x)=5-x$. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua occorreranno per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

1) Studio di f(x)

Funzione algebrica razionale intera di terzo grado. Definita e continua in R. Non ha asintoti

Poiché $f(-x) = -f(x)$ la funzione è dispari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine

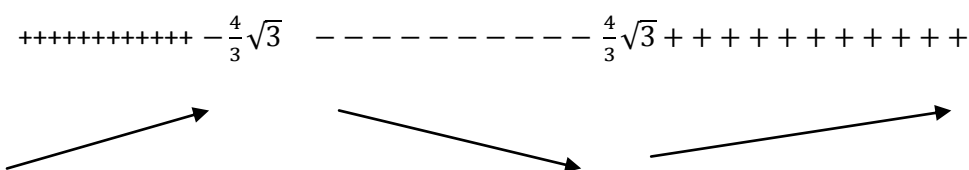
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

La funzione si annulla in

$(-4;0) \quad (0;0) \quad (4;0)$

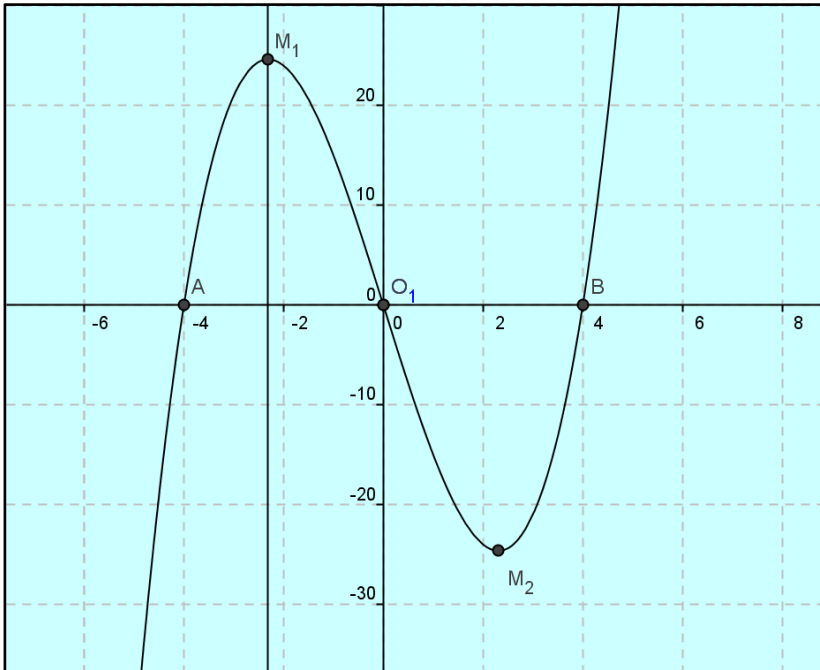
Studio del segno della derivata prima e della crescita o decrescenza della funzione

$$f'(x)=3x^2-16$$



Massimo relativo $M_1(-\frac{4}{3}\sqrt{3}; \frac{128}{9}\sqrt{3})$ minimo relativo $M_2(\frac{4}{3}\sqrt{3}; -\frac{128}{9}\sqrt{3})$

GRAFICO(il testo parla di conveniente sistema di riferimento in quanto è necessario utilizzare un riferimento cartesiano non monometrico)



Studio di $g(x)$

Sinusoide di periodo $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

Punti di incontro con l'asse x

$$\sin \frac{\pi}{2} x = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} x = k\pi \rightarrow x = 2k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

I punti a tangente orizzontale sono i massimi e i minimi della sinusoide

Massimi $\sin \frac{\pi}{2} x = 1 \rightarrow \frac{\pi}{2} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = 1 + 4k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Minimi $\sin \frac{\pi}{2} x = -1 \rightarrow \frac{\pi}{2} x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = 3 + 4k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Nell'intervallo $[-10; 10]$, che comprende 5 periodi, cadono 5 massimi e 5 minimi della sinusoide .

I massimi devono avere ascissa $1+4k$ tale che

$$-10 \leq 1+4k \leq 10 \rightarrow -2 \leq k \leq 2$$

Ascisse dei massimi:

-7 -3 1 5 9

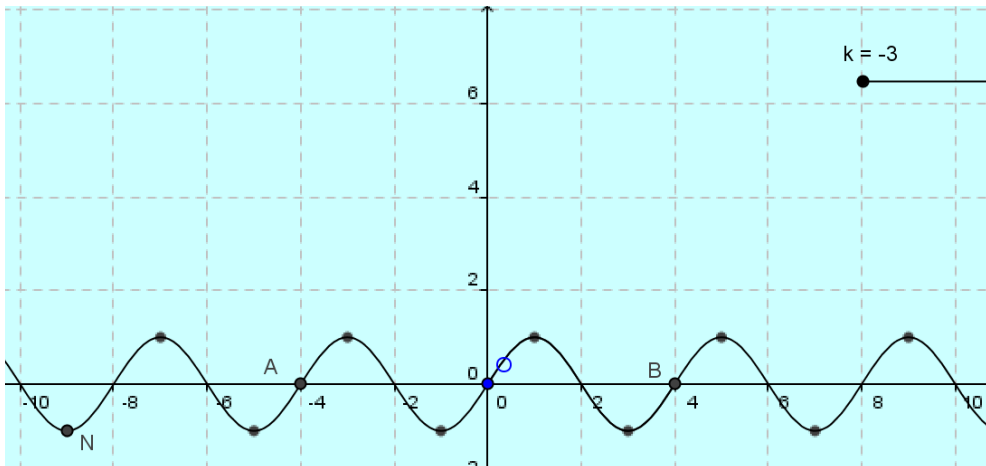
I minimi devono avere ascissa $3+4k$ tale che

$$-10 \leq 3+4k \leq 10 \rightarrow -3 \leq k \leq 1$$

Ascisse dei minimi:

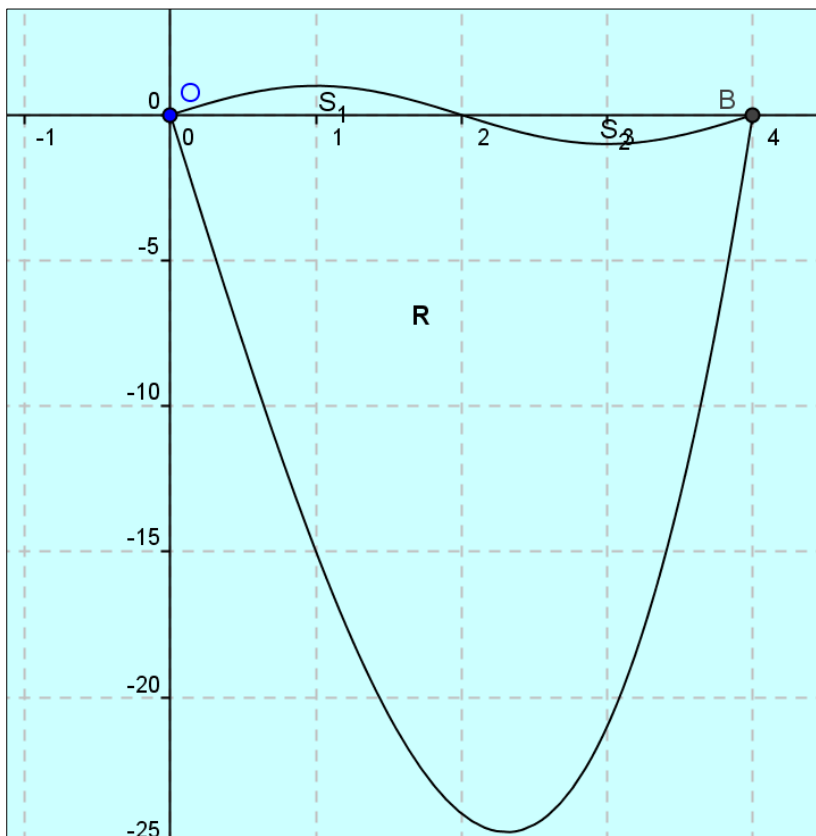
-9 -5 -1 3 7

GRAFICO

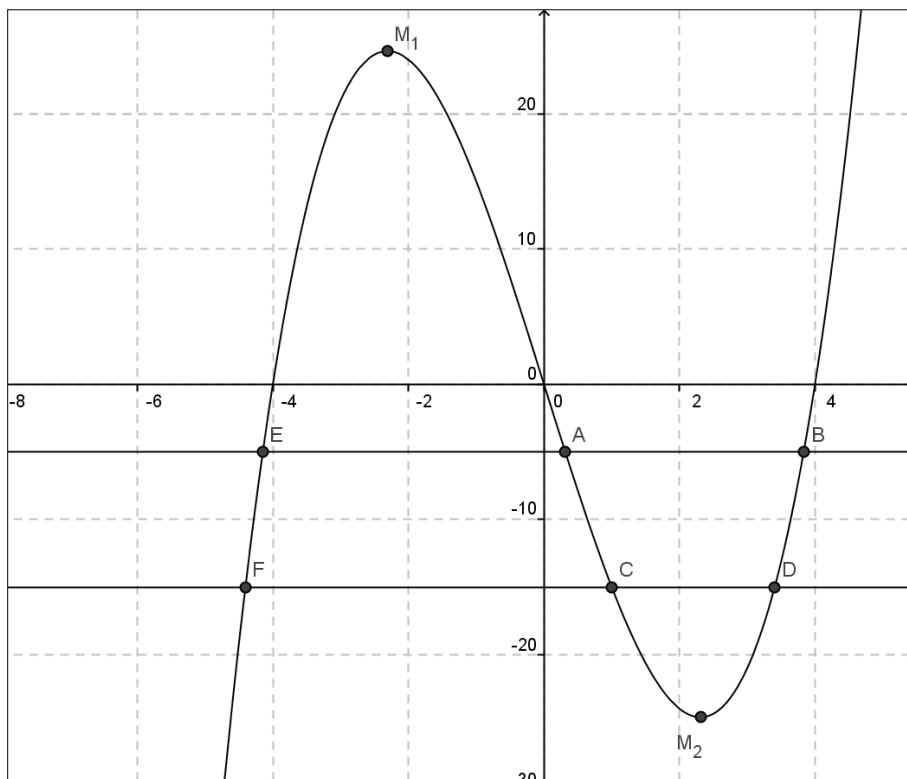


2) L'area di R equivale praticamente all'area della regione R' di piano limitata dall'arco del grafico di $f(x)$, nell'intervallo $[0;4]$ e l'asse x , in quanto le regioni di piano sottese dagli archi di sinusoidi danno un contributo globalmente nullo : $R=R'+S_1-S_2=R'$

$$\left| \int_0^4 (x^3 - 16x) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - 8x^2 \right]_0^4 \right| = 64$$



3) Il grafico suggerisce che ciascuna retta incontra la curva in tre punti reali e distinti



L'equazione $x^3 - 16x + 15 = 0$ ammette la radice (intera) $x_1 = 1$ (ascissa del punto C).

Il trinomio che compare al primo membro si scompone nei due fattori

$$(x - 1)(x^2 + x - 15) = 0$$

Le altre due radici corrispondono alle soluzioni dell'equazione $(x^2 + x - 15) = 0$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{61}}{2} \text{ (ascissa del punto F). Valore approssimato } -4,4$$

$$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{61}}{2} \text{ (ascissa del punto D). Valore approssimato } 3,4$$

L'equazione $x^3 - 16x + 5 = 0$ non ammette radici razionali.

Applicando il teorema di esistenza degli zeri e utilizzando un metodo numerico (per es. il metodo dicotomico) possiamo determinare un valore approssimato delle radici, a meno di 10^{-1}

L'ascissa del punto E è compresa fra -5 e -4 $x_1 \cong 4,1$ ascissa del punto E

L'ascissa del punto A è compresa fra 0 e 1 $x_3 \cong 0,3$ ascissa del punto C

L'ascissa del punto B è compresa fra 3 e 4 $x_2 \cong 3,8$ ascissa del punto B

Segue l'esecuzione degli algoritmi per ciascuna radice

Metodo di bisezione

Valori iniziali : a b

Se $f(a)*f(x_m) > 0$, allora a

→ x_m , altrimenti resta invariato

Se $f(a)*f(x_m) < 0$, allora b

→ x_m , altrimenti resta invariato

a	b	f(a)	f(b)	$x_m=(a+b)/2$	f(x_m)
-5	-4	-40	5	-4,5	-14,125
-4,50	-4,00	-14,13	5,00	-4,25	-3,77
-4,25	-4,00	-3,77	5,00	-4,13	0,81
-4,25	-4,13	-3,77	0,81	-4,19	-1,43
-4,19	-4,13	-1,43	0,81	-4,16	-0,30

a	b	f(a)	f(b)	$x_m=(a+b)/2$	f(x_m)
0	1	5	-10	0,5	-2,875
0,00	0,50	5,00	-2,88	0,25	1,02
0,25	0,50	1,02	-2,88	0,38	-0,95
0,25	0,38	1,02	-0,95	0,31	0,03
0,31	0,38	0,03	-0,95	0,34	-0,46
0,31	0,34	0,03	-0,46	0,33	-0,21

a	b	f(a)	f(b)	$x_m=(a+b)/2$	f(x_m)
3	4	-16	5	3,5	-8,125
3,50	4,00	-8,13	5,00	3,75	-2,27
3,75	4,00	-2,27	5,00	3,88	1,19
3,75	3,88	-2,27	1,19	3,81	-0,58
3,81	3,88	-0,58	1,19	3,84	0,29

4) Il solido di cui si vuol calcolare il volume gode della seguente proprietà:

la generica sezione ottenuta con un piano perpendicolare all'asse x, in un suo punto di ascissa x, è un rettangolo di dimensioni $[g(x)-f(x)]$ e $(5-x)$ ovvero di area

$$S(x) = (5 - x) \left(\sin \frac{\pi}{2} x - x^3 + 16x \right) = (5 - x) \sin \frac{\pi}{2} x + x^4 - 5x^3 - 16x^2 + 80x$$

Soluzione di Adriana Lanza

Il volume può essere calcolato con il [“metodo delle fette”](#)

$$V = \int_0^4 S(x) dx$$

Calcolo dell'integrale indefinito

$$\int (5 - x) \sin \frac{\pi}{2} x dx + \int (x^4 - 5x^3 - 16x^2 + 80x) dx$$

Calcoliamo il primo integrale con il metodo di integrazione per parti

$$\frac{2}{\pi} (x - 5) \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{2}{\pi} \int \cos \frac{\pi}{2} x dx = \frac{2}{\pi} (x - 5) \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{2} x$$

Il risultato del secondo integrale è

$$\frac{1}{5} x^5 - \frac{5}{4} x^4 - \frac{16}{3} x^3 + 40x^2$$

Il risultato dell'integrale definito sarà

$$-\frac{2}{\pi} + \frac{1024}{5} - 320 - \frac{1024}{3} + 640 + \frac{10}{\pi} = \frac{8}{\pi} + \frac{2752}{15} \cong 186,013$$

Se le misure sono espresse in metri, il volume è espresso in m^3

Poiché 1 litro equivale a 1 dm^3

volume d'acqua $\cong 186013$ litri