Soluzioni di Adriana Lanza

QUESITI

1)Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

Indicando con x l'altezza del cilindro, con y il raggio di base e con R il raggio della sfera

$V = \pi y^2 x$ 0<x<2R $0 < y < R$

essendo $x^2 + 4y^2 = 4R^2 \rightarrow y^2 = \frac{4R^2 - x^2}{4}$

$$V = \pi \frac{4R^2 - x^2}{4} x$$

$V' = \pi(R^2 - \frac{3}{4}x^2)$

Il volume è massimo se $x = \frac{2}{\sqrt{3}}R$ $y = \frac{\sqrt{6}}{3}R$ $V_{max} = \pi \frac{4}{9}\sqrt{3}R^3$

dove $R^3 = 216\ dm^3$

Capacità 522 litri circa

2)Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4;0)

Indicato con $P(x\ ; \sqrt{x})$ un generico punto della curva, il valore di x per cui è minima

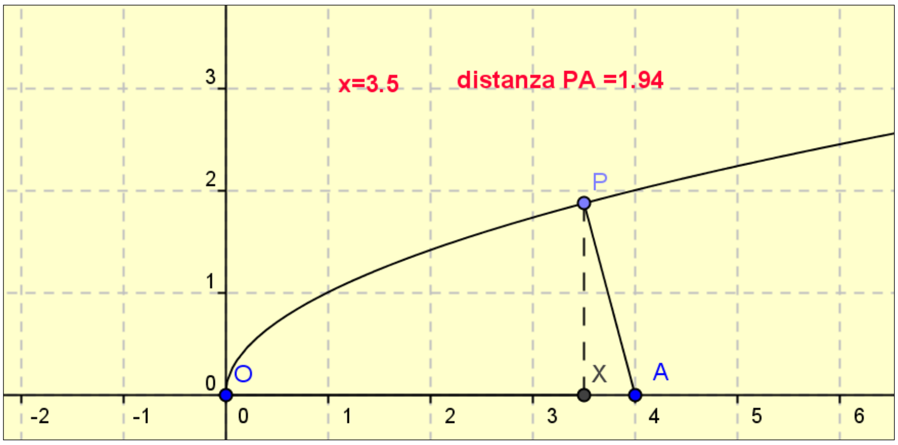
d = $\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$

è lo stesso per cui è minimo il so quadrato:

$d^2 = (x-4)^2 + x = x^2 - 7x + 16$

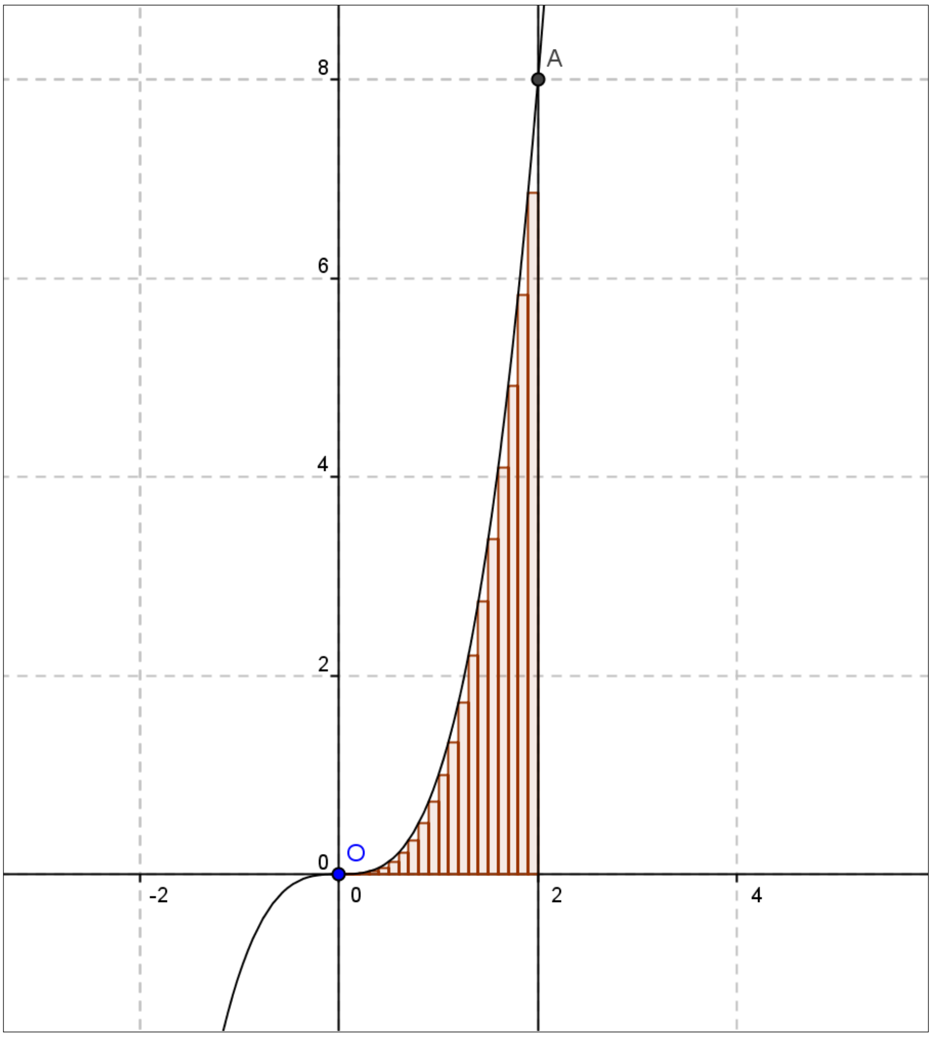
Associando alla funzione quadratica una parabola con la concavità verso l'alto, si ha il valore minimo in corrispondenza del vertice, la cui ascissa è $\frac{7}{2}$

Distanza minima $\sqrt{\frac{15}{4}} \cong 1.94$ Punto più vicino P($\frac{7}{2}$; $\sqrt{\frac{7}{2}}$)



3) **Sia R la regione delimitata dalla curva $y=x^3$,dall'asse x e dalla retta x=2 e sia W il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume W.**

Sia W il volume generato dalla rotazione di R intorno all'asse y



PRIMO METODO

Pensiamo la regione R decomposta in tanti rettangolini ,come quelli rappresentati in figura ,ognuno dei quali genera un solido pari alla differenza di due cilindretti, in modo che, intuitivamente potremo pensare W come somma progressiva di infiniti gusci cilindrici coassiali di spessore $\boldsymbol{dx}$, dove il raggio x varia da 0 a 2(integrazione "a cipolla" o a <<gusci cilindrici>>

Il volume del guscio (infinitesimo) può essere calcolato nel modo seguente:

$\pi((x + dx)^2 - x^2))x^3$ *{Area della corona circolare per l'altezza}*

che, trascurando l'infinitesimo di ordine superiore dx^2, si riduce a $\mathbf{2\pi x^4 dx}$

Procedendo in modo più rigoroso,,se n è il numero dei gusci(ovvero il numero degli intervalli in cui è stato suddiviso l'intervallo $[0;\pi]$) e $\Delta \mathbf{x}_{\mathbf{i}}$ l'ampiezza del generico intervallo,possiamo scrivere

$V = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{2\pi x_i x_i^4 \Delta x_i} = \int_0^{\pi} \mathbf{2\pi x sen\, x\, dx} = \mathbf{2\pi \int_0^2 x^4\, dx}$

per definizione di integrale definito

$$2\pi \int_0^2 x^4\, dx = \frac{64}{5}\pi$$

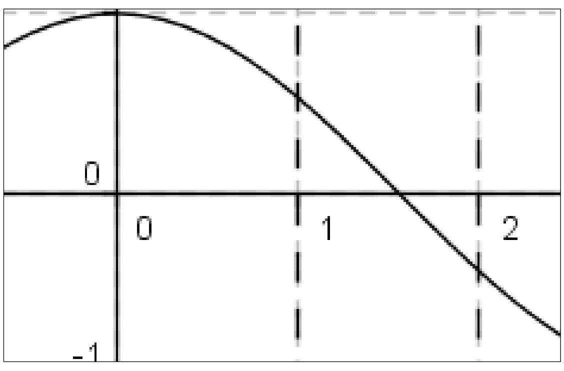
SECONDO METODO

Consideriamo il solido come differenza del cilindro di altezza AB e raggio di base OB e il solido generato dalla rotazione dell'area compresa tra l'arco OA della curva $x = \sqrt[3]{y}$ e l'asse y.

$$32\pi - \pi \int_0^8 (f^{-1} y)^2\, dy$$

$$32\pi - \pi \int_0^8 \sqrt[3]{y}\, dy = 32\pi\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{64}{5}\pi$$

4) Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva y=cos x e dall'asse x da x=1 a x=2 radianti



Soluzioni di Adriana Lanza

La regione di cui parla il testo non è un trapezoide, poiché la curva attraversa l'asse delle x in un punto interno all'intervallo considerato, precisamente nel punto di ascissa $\frac{\pi}{2}$ ≅1.57 radianti

Area= $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{2} \cos x\, dx = 1 - \sin 1 - \sin 2 + 1 = 2 - \sin 1 - \sin 2 \cong 0{,}25$

5)**Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.**

$\binom{n}{4} = \binom{n}{3}$ **deve essere n≥4**

$$\frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} \to \frac{1}{4*3!(n-4)!} = \frac{1}{3!(n-3)(n-4)!} \to \frac{1}{4} = \frac{1}{n-3} \to n = 7$$

Più velocemente si arriva al risultato ricordando le proprietà di simmetria dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(elementi equidistanti dagli estremi nella riga n-sima del triangolo di Tartaglia)

6) Si calcoli $\lim_{x \to \alpha} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \alpha}{x - \alpha}$

Applicando la regola di $De\ L'H\hat{o}pital$ si trova $\lim_{x \to \alpha} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

In alternativa si può utilizzare l'identità

$$\tan(x - \alpha) = \frac{\tan x - \tan \alpha}{1 + \tan x \tan \alpha} \to \lim_{x \to \alpha} \frac{\tan x - \tan \alpha}{x - \alpha} =$$

$\lim_{x \to \alpha} \frac{\tan(x-\alpha)(1+\tan x \tan \alpha)}{(x-\alpha)}$ $=1 + \tan^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$ $=\frac{1}{\cos^2 \alpha}$

poiché

Soluzioni di Adriana Lanza

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{\tan(x-\alpha)}{(x-\alpha)} = \lim_{z \to 0} \frac{\tan z}{z} = 1$$

7)Si provi che l'equazione $x^{20011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0

f(x) è continua in R e in particolare in [-1;0]

f(0)>o f(-1)<0 → esiste uno zero della funzione compresa fra -1 e 0 (per il teorema di esistenza degli zeri)

$f'(x) = 2011x^{2010} + 2011$ → f'(x)>0 $\forall x \in R$ →f(x) è monotona crescente → f(x)non si può annullare più di una volta

QUESITO 8)

8)In che cosa consiste il problema della quadratura del cerchio? Perché è citato così spesso?

Risposta <u>con approfondimento</u>

La **quadratura del cerchio,** assieme al problema della trisezione dell'angolo e a quello della duplicazione del cubo, è uno dei più noti problemi classici dell'antichità, la cui soluzione grafica richiede strumenti diversi da quelli <<ammessi>> dalla geometria greca, la riga e il compasso.

PREMESSA

Eseguire costruzioni con riga e compasso significa, partendo da almeno due punti sul piano, compiere un numero finito di operazioni con due strumenti "ideali": la riga (per tracciare rette) e il compasso (per tracciare circonferenze). Le operazioni di base impiegate negli *Elementi* sono quelle descritte nei primi tre postulati del libro primo:

1. È possibile condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto;
2. È possibile prolungare illimitatamente in linea retta una segmento finito;
3. È possibile descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio

Un problema si dice **risolubile con riga e compasso** quando può essere ricondotto ad una **sequenza finita di operazioni scelte tra le seguenti**

1. dati due punti, costruire la retta passante per essi;

2. dato un punto ed un segmento, trovare la circonferenza che ha quel punto come centro e quel segmento come raggio;
3. date due rette, trovarne (se esiste) il punto comune;
4. date una retta ed una circonferenza, trovarne (se esistono) i punti comuni;
5. date due circonferenze, trovarne (se esistono) i punti comuni.

Questo significa che operando con riga e compasso, possiamo individuare solo punti le cui coordinate si ottengono **risolvendo successivamente equazioni di I oppure equazioni di II grado o comunque riconducibili a equazioni di II grado.**
Un numero reale associato ad una costruzione siffatta si dirà costruibile con riga e compasso
Dunque: ***un numero reale*** α ***non è costruibile con riga e compasso se:***

a) ***non è algebrico*** *(non è soluzione di alcuna equazione algebrica a coefficienti interi)*
b) ***soddisfa un'equazione algebrica f(x)=0, dove f(x) è un polinomio, irriducibile a coefficienti razionali, il cui grado non è una potenza di 2***

.

LA QUADRATURA DEL CERCHIO

Il problema , consiste nel costruire , con uso esclusivo di riga e compasso, un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio , ovvero nel costruire un segmento lungo $\sqrt{\pi}$, a partire dal segmento unità. Essendo π, ed anche la sua radice quadrata, un numero trascendente (non algebrico), non è costruibile con riga e compasso.

Fino a quando non fu dimostrata la trascendenza di π ,da Ferdinand von Lindemann, nel 1882, molti erano stati i tentativi della quadratura del cerchio, tutti infruttuosi, anche se alcuni matematici pervennero a soluzioni approssimate di notevole interesse.

Questo spiega perché l'espressione era (ed è) diventata sinonimo di un'impresa ardua , di enorme difficoltà o addirittura vana, senza speranza o priva di un significato concreto Nota è la citazione da parte di Dante , nell'ultimo canto del Paradiso:

Qual è 'l geomètra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,
tal era io a quella vista nova:
veder voleva come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova;

I versi citati tentano di spiegare la presenza contemporanea, nel Verbo, della natura umana e di quella divina. La difficoltà di questa spiegazione è paragonata a quello che può essere considerato il problema principe della geometria classica, appunto la quadratura del cerchio.

QUESITO 9

Si provi che nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

Sia ABC un triangolo rettangolo in C , sia M il punto medio dell'ipotenusa AB ed r la retta perpendicolare in M al piano π del triangolo.Il punto M è equidistante da A, da B e da C.

Dimostriamo che la retta r è il luogo geometrico dei punti equidistanti da i tre vertici

PRIMO METODO

Per dimostrare che la retta r è il luogo geometrico dei punti equidistanti da i tre vertici dobbiamo mostrare che:

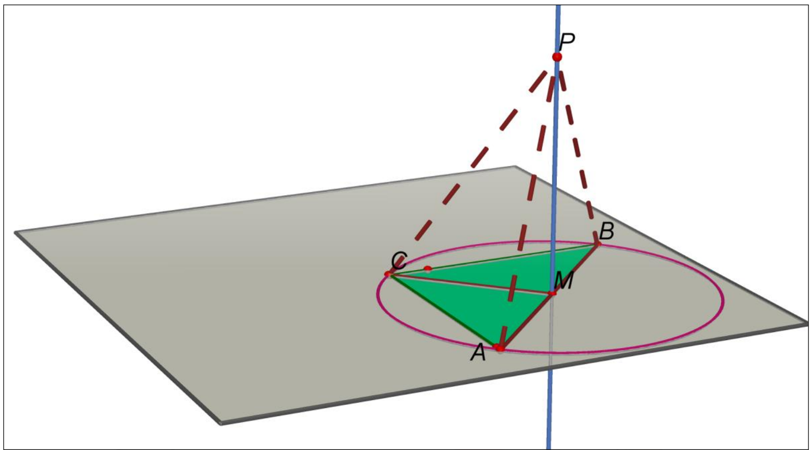
a) ogni punto P di r è equidistante da A,B e C

Essendo MA=MB=MC , i triangoli rettangoli PMC,PMB e PMA , aventi in comune il cateto PM, sono tra loro congruenti; pertanto risulta PA=PB=PC

b) ogni punto P equidistante da A,B e C appartiene ad r

Se P è un punto tale che PA=PB=PC, i triangoli PMC,PMB e PMA sono tra loro congruenti per il terzo criterio di uguaglianza. Poiché il triangolo PAB è isocele, la mediana PM è anche altezza e quindi i triangoli PMB e PMA sono rettangoli e di conseguenza sarà rettangolo anche il triangolo PMC.

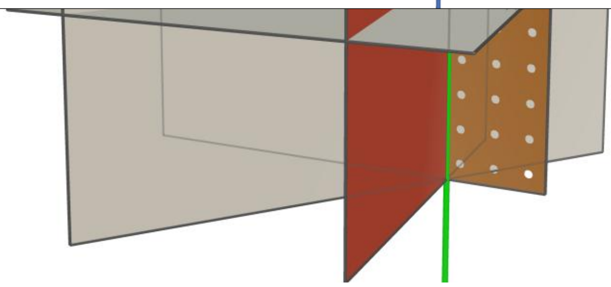
La retta PM, essendo perpendicolare a due rette del piano di ABC,è perpendicolare al piano stesso e quindi coincide necessariamente con r.



SECONDO METODO

Il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e da B è il piano α perpendicolare in M ad AB

Il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e da C è il piano β perpendicolare ad AC nel suo punto medio L



Il luogo geometrico dei punti equidistanti da C e da B è il piano γ perpendicolare a BC nel suo punto medio N

I tre piani α,β e γ sono tutti e tre perpendicolari al piano π in cui giace il triangolo e devono contenere il punto M.

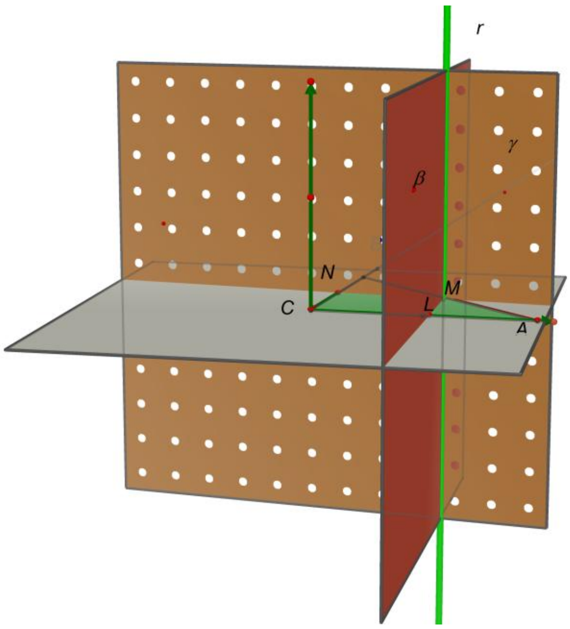
La retta comune ad α e a β, essendo perpendicolare a π e dovendo passare per M, coincide con r

La retta comune ad α e a γ, essendo perpendicolare a π e dovendo passare per M, coincide con r

Si conclude pertanto che la retta r, appartenendo ad α, a β e a γ, è il luogo geometrico dei punti equidistanti da A, da B e da C

TERZO METODO

Introduciamo un riferimento cartesiano avente l'origine nel vertice C dell'angolo retto , l'asse x e l'asse y coincidenti con le rette cui appartengono i due cateti, l'asse z coincidente con la retta perpendicolare a π nel punto C.



Poniamo:

C(0,0,0) A(a,0,0) B(0,b,0) da cui segue M$(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0)$

Indichiamo con P(x,y,z)un generico punto dello spazio e imponiamo che

$\overline{PC} = \overline{PA} = \overline{PB}$ ovvero

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = & (x-a)^2+y^2+z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = & x^2+(y-b)^2+z^2 \end{cases}$$

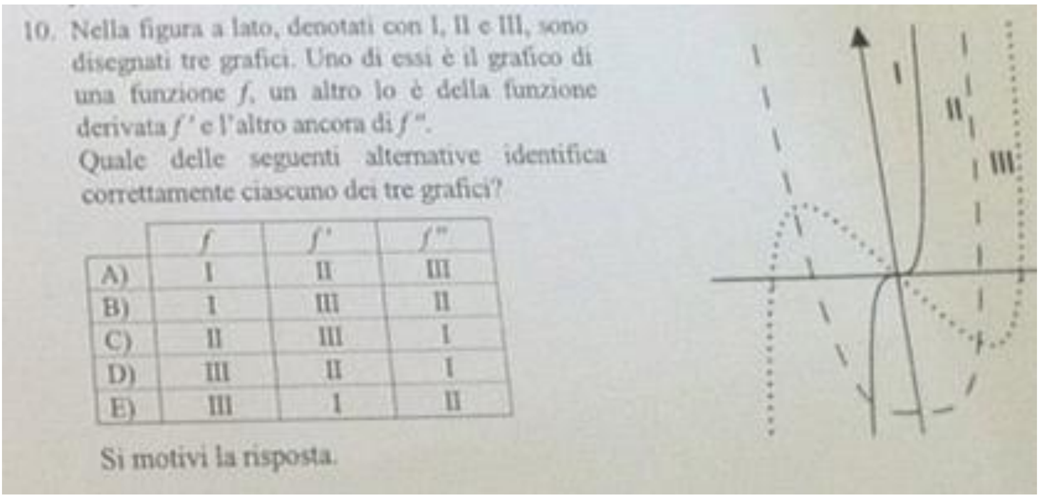
Dopo le opportune semplificazioni si ottiene

$$\begin{cases} x = & \frac{a}{2} \\ y = & \frac{b}{2} \end{cases}$$

Le due equazioni rappresentano, rispettivamente , il piano β perpendicolare a CA e passante per il suo punto medio L, il piano γ,perpendicolare a CB e passante per il suo punto medio N. Entrambi i piani passano per M e sono perpendicolari al piano xy .

Il luogo geometrico richiesto è pertanto la retta intersezione di β e γ, ovvero la retta perpendicolare in M al piano xy.

La retta suddetta coincide proprio con la retta r.



10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''.
Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.

10) 10)

PRIMA PRIMA OSSERVAZIONE : Se il grafico di f fosse **I** , f' non potrebbe assumere valori negativi, quindi non potrebbe corrispondere a nessuno degli altri 2 grafici

Pertanto devono essere scartate le risposte A e B

SECONDA OSSERVAZIONE Dai grafici si evince che II è una funzione pari, mentre le altre due sono funzioni dispari.

Poiché la derivata di una funzione pari, non costante, è una funzione dispari e viceversa, devono essere scartate le risposte C ed E

Risposta esatta D

oppure

Se il grafico di f fosse **I** , f' non potrebbe assumere valori negativi, quindi non potrebbe corrispondere a nessuno degli altri 2 grafici

Pertanto devono essere scartate le risposte A e B

Se il grafico di f fosse **II** , f' potrebbe avere come grafico I pertanto deve essere scartata le risposte C

Se il grafico di f fosse **III** , f' potrebbe corrispondere a **II** e , in tal caso, f" potrebbe corrispondere a **I**

Risposta esatta D