Soluzione di Adriana Lanza

PROBLEMA.1.

Nel riferimento cartesiano Oxy si consideri il triangolo di vertici O, B(1;0) , A(0;a), con a>0.

Preso un punto P interno al triangolo OBA, si denotino con Q e con R i punti in cui la retta per P, parallela all'asse y, taglia i lati OB e AB rispettivamente.

1. ***Si dimostri che il luogo dei punti P interni al triangolo OBA, tali che***

QP:QR = OQ:OB

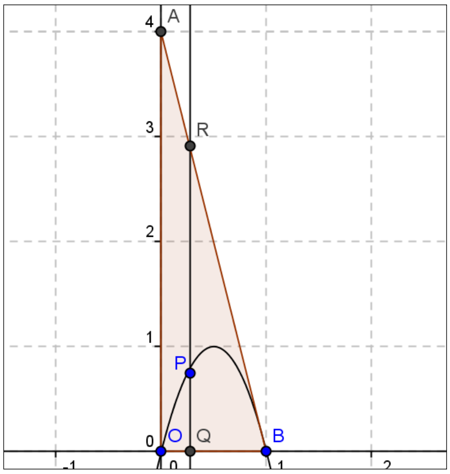
è un arco della parabola Γ d'equazione y= ax(1-x).

2. Si verifichi che il lato BA e la mediana ad esso relativa sono tangenti a Γ rispettivamente in B e in O.

3. Si denoti con Ω la regione delimitata da Γ e da OB. In Ω, si inscriva un rettangolo con un lato su OB; si stabilisca per quale valore di a il rettangolo di perimetro massimo risulta essere un quadrato

4. Posto $a=\frac{1}{2}$ si indichi con r la retta ortogonale a Γ nel punto B. Si calcoli l'area racchiusa tra r e Γ e si calcoli altresì il volume del solido generato dalla rotazione di Ω intorno alla retta y = -1

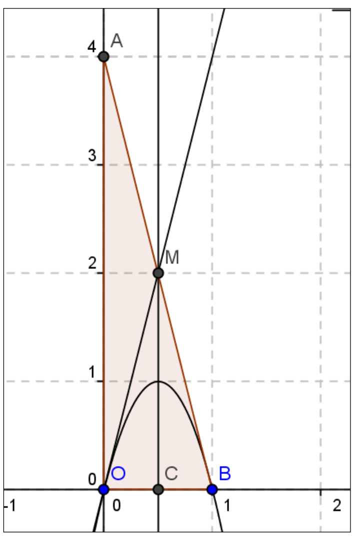
1) La $retta\ AB\quad ha\ equazione\quad y=-ax+a$



Posto $P(x;y)$ con le limitazioni $\begin{cases} 0<x<1 \\ 0<y<a \\ y+ax-a<0 \end{cases}$

$$\frac{\overline{QP}}{\overline{QR}}=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}} \rightarrow \frac{y}{-ax+a}=\frac{x}{1} \rightarrow y=ax(1-x)$$

L'equazione y=ax(1-x) = ax-ax^2 rappresenta una parabola passante per O e per B, avente per asse di simmetria la retta $x=\frac{1}{2}$ e per vertice il punto $V(\frac{1}{2};\frac{a}{4})$



I punti dell'arco OB di parabola soddisfano le condizioni e le limitazioni richieste

Per la terza limitazione, osserviamo che può essere scritta nella forma

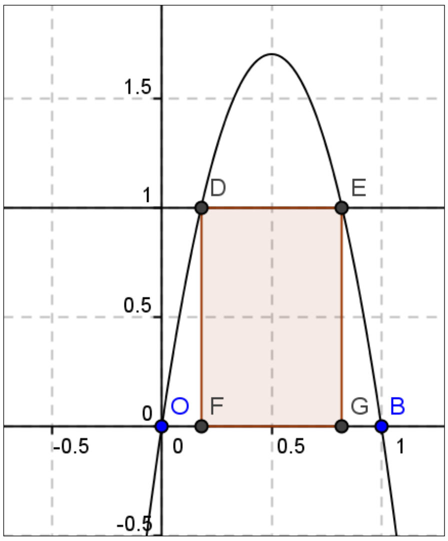
$ax-ax^2+ax-a=-a(x-1)^2<0$ vera per x≠1

2) La retta AB è tangente in B alla parabola: infatti il suo coefficiente angolare è uguale a –a e coincide con il valore della derivata della funzione ax-ax^2 , calcolata in x=1.

Soluzione di Adriana Lanza

La retta tangente in O è la simmetrica della retta AB rispetto all'asse della parabola e deve incontrare la retta AB sull'asse della parabola stessa, cioè nel punto medio del segmento AB. Pertanto coincide con la retta OM,

Allo stesso risultato si perviene per via analitica , dopo aver osservato che la tangente in O alla parabola ha equazione y=ax e che le due tangenti si incontrano nel punto $M(\frac{1}{2};\frac{a}{2})$



3) Con riferimento alla figura, i punti D ed E hanno coordinate $D(k;-ak^2+ak)$ $E(1-k;-ak^2+ak)$

$$dove\ \ 0<k<\frac{1}{2}$$

La lunghezza del segmento DE è 1-2k

Il perimetro del rettangolo è uguale a

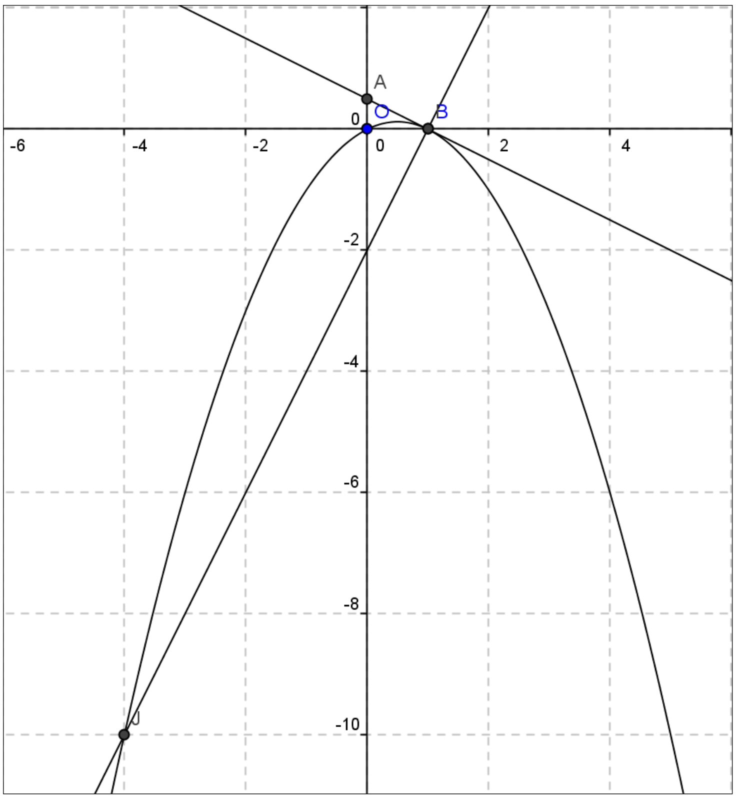
$P(k)=\ 2(1-2k-ak^2+ak)=2[1+(a-2)k-ak^2\,]$

Il valore massimo si ottiene per $k=\frac{a-2}{2a}$, accettabile se a>2,

cui corrispondono i valori $\overline{DE}=\frac{2}{a}$ $\overline{DF}=\frac{a^2-4}{4a}$

Il rettangolo di area massima è un quadrato se $\frac{2}{a}=\frac{a^2-4}{4a}$ →a=$2\sqrt{3}$

4)La retta r di equazione $y=2(x-1)$ incontra Γ in un punto di ascissa -4

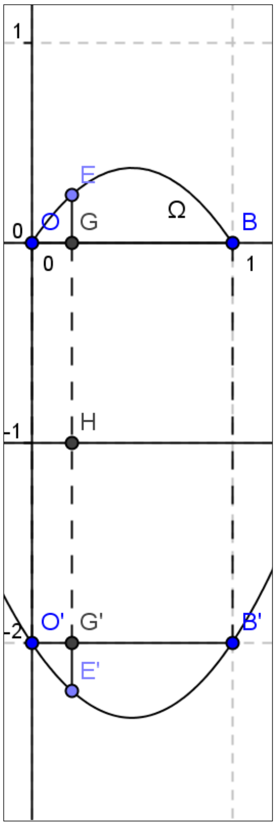


Soluzione di Adriana Lanza

L'area richiesta è

$\int_{-4}^{1}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2-2x+2\right)dx=[-\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{4}x^2+2x]_{-4}^{1}=\frac{125}{12}$

Per calcolare il volume richiesto osserviamo che tagliando il solido con piani perpendicolari all'asse x, nell'intervallo [0;1], si ottengono corone circolari il cui raggio esterno è $\overline{EH}$ =f(x) +1=$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2$+1 e il raggio interno è $\overline{GH}$ =1(cfr. figura seguente)



$V=\pi\int_0^1(\ (f(x)+1)^2-1)dx=\pi\int_0^1(\ (f^2(x)+2f(x))dx=$

$\pi\int_0^1(\ \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x^3-x^2+x)dx=\pi[\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\ ]_0^1\ =\frac{7}{40}\pi$