Soluzioni di Adriana Lanza

**1. *Sia W il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la parte di piano compresa, per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$***

***Fra il grafico di $y = sen\,x$ e l'asse x. Quale dei seguenti integrali definiti fornisce il volume di W?***

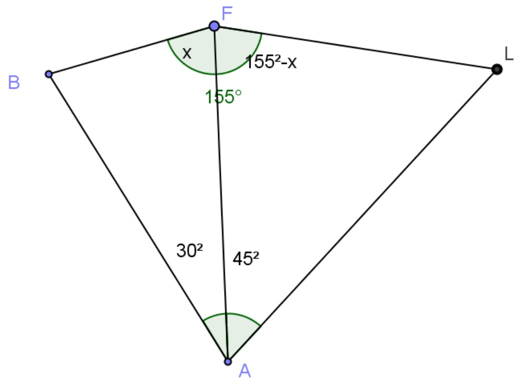
***A)*** $2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,sen\,x\;dx$ ; ***B)*** $\pi \int_0^1 (arcsen\,x)^2\,dx$ ; ***C)*** $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2\,x\,dx$ ***D) Nessuno di questi***

***Si motivi la risposta***

La risposta esatta è la A)

[Metodo dei gusci cilindrici]

**2. *Angelo siede in un punto A della piazza del suo paese e vi osserva un albero in B, una fontana in F e un lampione in L. Stima l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede la congiungente B e F pari a 30° e l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede FL pari a 45°. Sapendo che BF=12m e FL=20m e che $B\widehat{F}L = 155°$, si spieghi ad Angelo come procedere per calcolare AB, AF e AL. Sono attendibili i risultati AB=AF≅23,18m e AL≅ 27,85m?***




Indicando con x l'ampiezza dell'angolo $A\hat{F}B$ avremo

$$A\hat{B}F = 180° - 30° - x = 150° - x$$

$$A\hat{F}L = 155° - x \qquad A\hat{L}F = 180° - 45° - 155° + x = x - 20°$$

$$20° < x < 150°$$

applicando il teorema dei seni al triangolo BAF e al triangolo ALF si ottengono le relazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{AF}}{\sin(150° - x)} = \dfrac{\overline{BF}}{\sin 30°} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin x} \\ \dfrac{\overline{AF}}{\sin(x - 20°)} = \dfrac{\overline{FL}}{\sin 45°} = \dfrac{\overline{AL}}{\sin(155° - x)} \end{cases}$$

Da esse si può innanzi tutto dedurre la relazione $\frac{\overline{BF}}{\sin 30°}\sin(150° - x) = \frac{\overline{FL}}{\sin 45°}\sin(x - 20°)$

dalla quale, noti i valori di $\overline{BF}$ e di $\overline{FL}$, è possibile determinare x.

Noto il valore di x , si può calcolare

$\overline{AB} = \frac{\overline{BF}}{\sin 30°} \sin x$ $\qquad$ $\overline{AF} = \frac{\overline{BF}}{\sin 30°} \sin(150° - x)$ $\qquad$ $\overline{AL} = \frac{\overline{FL}}{\sin 45°} \sin(155° - x)$

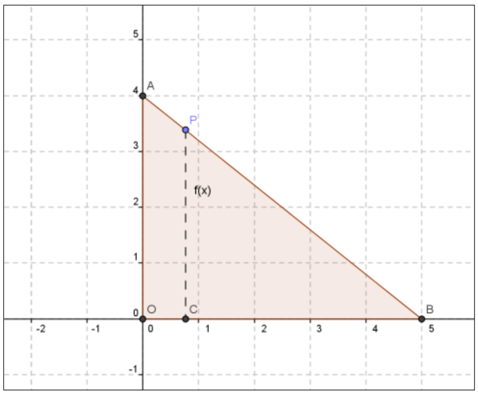
i risultati AB=AF≅23,18m e AL≅ 27,85m sono attendibili .

Infatti, se AB = AF possiamo affermare che

$$(150° - x) = \sin x \rightarrow x = 75° \rightarrow$$
$$\overline{AB} = \overline{AF} = 24 \sin 75° \cong 23{,}18$$
$$\overline{AL} = 20\sqrt{2} \sin 80° \cong 27{,}85$$

**3.** *La base di un solido S è la regione triangolare compresa tra gli assi coordinati e la retta d'equazione: 4x+5y=20. Si calcoli il volume di S sapendo che le sue sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi*

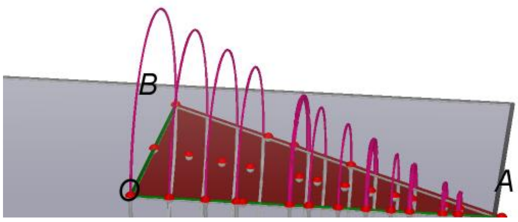
Metodo delle fette $V = \int_0^5 \frac{\pi}{2}\left(\frac{f(x)}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{8}\int_0^5 (f(x))^2 \mathrm{dx}$ $\quad$ *ovvero*

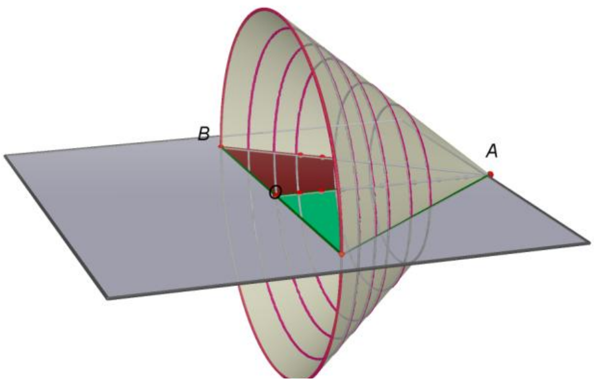



$V = \frac{1}{8}$ del volume del cono generato dalla rotazione del triangolo AOB intorno all'asse x $= \frac{1}{8}\frac{1}{3}\pi 16 * 5 = \frac{10}{3}\pi$

In effetti Il volume del solido può essere calcolato sfruttando il principio di Cavalieri.

Se si confrontiamo le sezioni ottenute tagliando il solido con un fascio di piani perpendicolari all'asse x, compresi tra il piano del fascio passante per il punto A e quello passante per il punto B, con le sezioni ottenute tagliando con gli stessi piani il cono ottenuto dalla rotazione del triangolo OAB intorno all'asse x, possiamo osservare che esse stanno sempre nel rapporto 1/8.

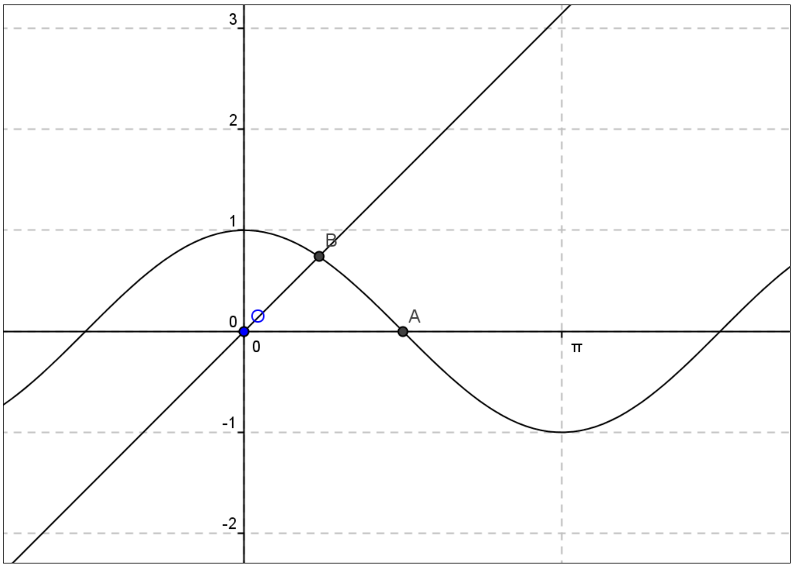


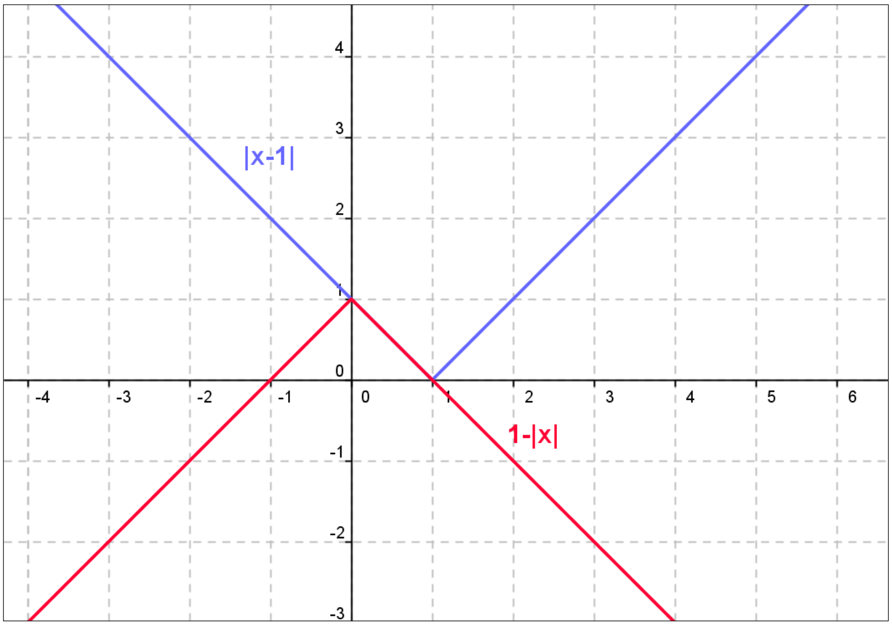

Infatti i semicerchi di cui parla il testo devono avere raggio pari a $\frac{f(x)}{2}$ mentre le sezioni del cono sono cerchi raggio pari a f(x)

4. *Si spieghi perché l'equazione* $\cos x = x$ *ha almeno una soluzione.*

La funzione f(x)= cos x-x è definita e continua in R. Oiché è possibile determinare un intervallo agli estremi del quale assume valori di segno opposto (es. $f(0) = 1 \; e \; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ) , per il Teorema di esistenza degli zeri, esiste almeno un valore di x che soddisfa l'equazione $\cos x - x = 0 \quad e \; quindi \; anche \; l'equazione \; \cos x = x$

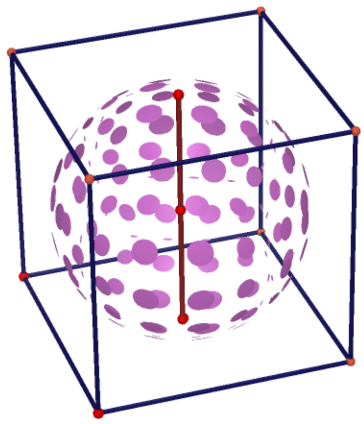



5. *Si risolva l'equazione |x- 1| =1 - |x|*




Il confronto dei due grafici evidenzia che le soluzioni dell'equazione corrispondono a tutti i punti dell'intervallo[0;1]
Analiticamente si trova:

$$x \leq 0 \qquad l'equazione \; diventa \quad 1 - x = 1 + x \quad \rightarrow \quad x = 0$$
$$0 < x \leq 1 \qquad l'equazione \; diventa \quad 1 - x = 1 - x \quad \rightarrow \forall x$$
$$x > 1 \qquad l'equazione \; diventa \quad x - 1 = 1 - x \quad \rightarrow x = 1$$



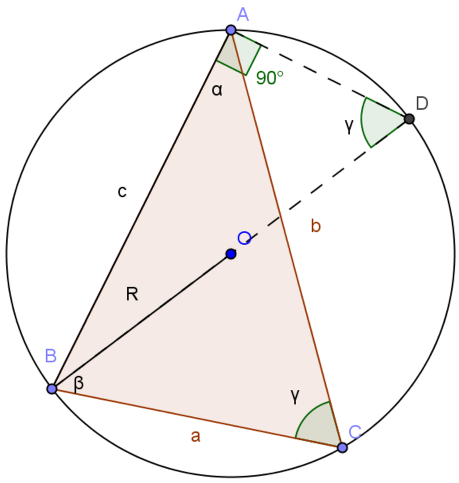
***6. Una sfera è inscritta in un cubo; quale è il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo?***

Lo spigolo s del cubo è uguale al diametro della sfera

$V_{cubo} = s^3 \quad V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi(\frac{s}{2})^3$

$$\frac{V_{sfera}}{V_{cubo}} = \frac{\pi}{6}$$

***7. Si dimostri che in un triangolo, il rapporto tra ciascun lato e il seno dell'angolo ad esso opposto è uguale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo.***




Dato un triangolo ABC , sia R il raggio del cerchio ad esso circoscritto

Dobbiamo dimostrare , con riferimento alla figura a lato,che

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Si considerino per esempio il lato AB , di lunghezza c e l'angolo opposto $B\hat{C}A = \gamma$.Sia BD il diametro del cerchio circoscritto, passante per B.

L'angolo $A\hat{D}B$ è uguale all'angolo $A\hat{C}B$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco.

Il triangolo BAD è retto in A , quindi, per i teoremi sui triangoli rettangoli

$$\overline{AB} = \overline{BD}\sin\gamma \rightarrow \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

In modo analogo si dimostrano le altre uguaglianze.

***8. Sia $t \in [0; 2\pi]$ 0; 2; quale è la curva rappresentata dalle equazioni $x = a\cos t$ e $y = b\sin t$ ?***

Ellisse di semiassi a e b

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos t \\ \frac{y}{b} = \sin t \end{cases}$$

Quadrando e sommando

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$