Soluzione di Adriana Lanza

QUESTIONARIO

1. Si provi che se i lati di un triangolo rettangolo sono in progressione aritmetica di ragione d allora il raggio della circonferenza inscritta è uguale a d.

indicando con ***a*** la misura del lato minore le misure dell'altro cateto e dell'ipotenusa saranno, rispettivamente $\boldsymbol{a+d} \quad e \quad \boldsymbol{a+2d}$

Imponendo la relazione pitagorica

$$(a+2d)^2 = a^2 + (a+d)^2 \rightarrow 4ad + 4d^2 = a^2 + 2ad + d^2 \rightarrow$$

$$a^2 - 2ad - 3d^2 = 0 \quad \rightarrow a = -d \ \cup \ a = 3d$$

Delle due soluzioni solo la seconda è accettabile

Ricordando che l'area ***S*** di un poligono circoscrivibile ad un cerchio si può calcolare moltiplicando la misura del semiperimetro ***p*** per la misura ***r*** del raggio del cerchio inscritto

$$r = \frac{S}{p} = \frac{a(a+d)}{3a+3d} = \frac{a}{3} = d$$

2. Sia W il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la parte di piano compresa, per $\boldsymbol{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$
Fra il grafico di $\boldsymbol{y = \sin x}$ e l'asse x. Quale dei seguenti integrali definiti fornisce il volume di W?

A) $2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$; **B)** $\pi \int_0^1 (arcsen\, x)^2$ **dx ; C)** $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2\, x \, dx$ **D) Nessuno di questi**

Si motivi la risposta

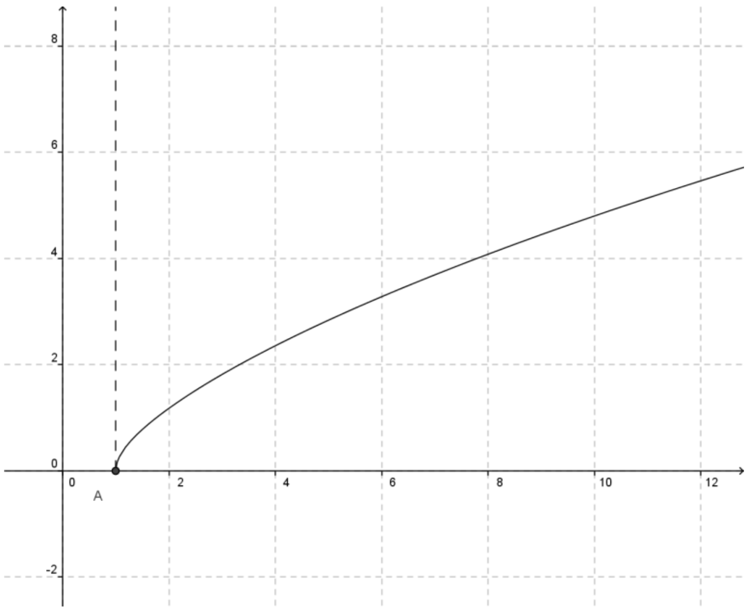
La risposta esatta è la A)

[Metodo dei gusci cilindrici]

3. Fra tutti i parallelepipedi rettangoli, a base quadrata, di superficie totale a^2 quale è quello di volume massimo?

Indicate con x, y e z le dimensioni del parallelepipedo

Soluzione di Adriana Lanza



$$\begin{cases} y = x \\ 2x^2 + 4xz = a^2 \end{cases}$$

Indicate con x, y e z le dimensioni del parallelepipedo

$\begin{cases} y = x \\ 2x^2 + 4xz = a^2 \end{cases}$ $V = x^2 z = x\left(\frac{a^2-2x^2}{4}\right) \to V'(x) = \frac{a^2-6x^2}{4}$ $0 < x < \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$V'(x) \geq 0 \quad per \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Il volume massimo si ha per $x = y = z = \frac{a}{\sqrt{6}} \to CUBO$

$$V_{max} = \frac{\sqrt{6}}{36} a^3$$

4. La curva di equazione $\sqrt{x \ln x}$ ammette punti con tangente parallela all'asse x? Ammette punti con tangente parallela all'asse y? In caso affermativo si determinino.

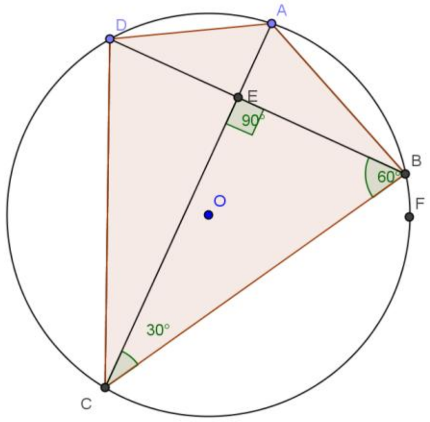
La funzione $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ è definita e continua nell'intervallo *D* [1;+∞[

E' derivabile in tutti i punti dello stesso intervallo , escluso x=1

La derivata $f'(x) = \frac{\ln x + 1}{2\sqrt{x \ln x}}$ non si annulla in alcun punto dell'intervallo *D*, mentre $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty$

La curva di equazione y=f(x) non ha alcun punto a tangente orizzontale mentre ha una semitangente verticale nel punto (1;0)

5. In una circonferenza di centro O e raggio *r* sono date due corde prive di punti comuni $\overline{AB} = r$ *e* $\overline{CD} = r\sqrt{3}$. Si dimostri che il quadrilatero ABCD ha le diagonali perpendicolari.



Dal Teorema della corda si deduce che gli angoli $A\hat{C}B$ e $D\hat{B}C$ *hanno ampiezza 30° e 60° rispettivamente, pertanto l'angolo* $B\widehat{E}C$ *è retto*

6. ***Sia P un punto del piano di coordinate*** $\left(t+\frac{1}{t};\, t-\frac{1}{t}\right)$***, Qual è l'eqyazione cartesiana del luogo descritto da P al variare di t (t≠0)?***

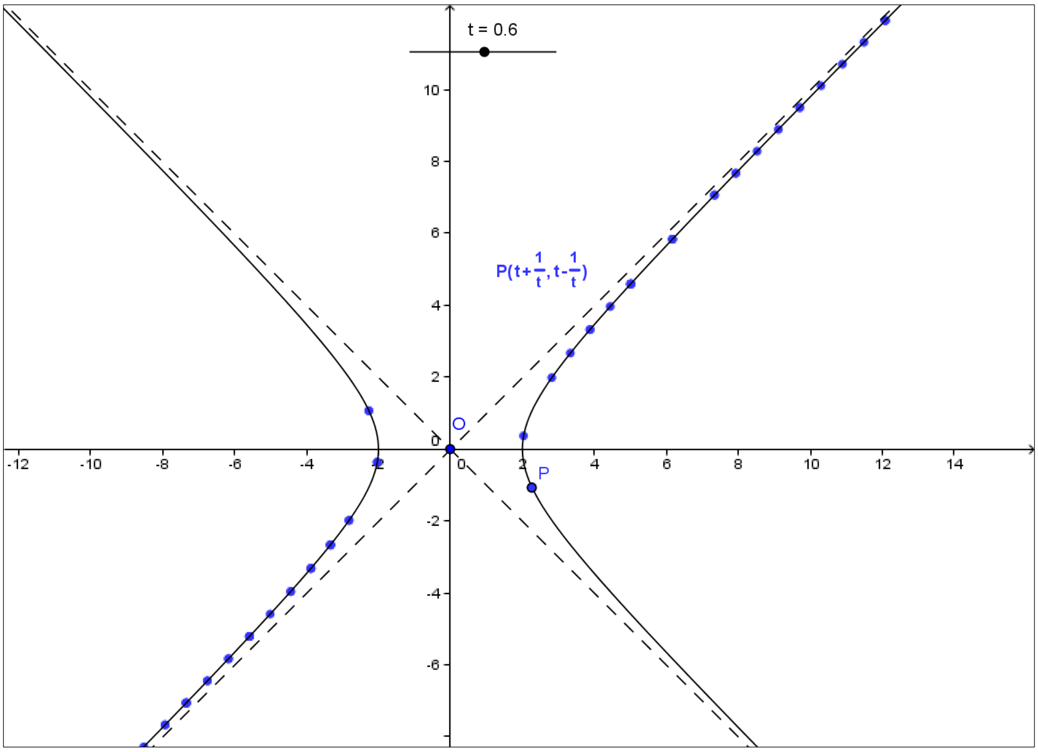
$$\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = t - \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$x + y = 2t \rightarrow t = \frac{x+y}{2} \rightarrow \quad y = \frac{x+y}{2} - \frac{2}{x+y}$$

$$2xy + 2y^2 = \ x^2 + 2xy + y^2 - 4 \ \rightarrow x^2 - y^2 = 4$$

Il luogo è un'iperbole equilatera

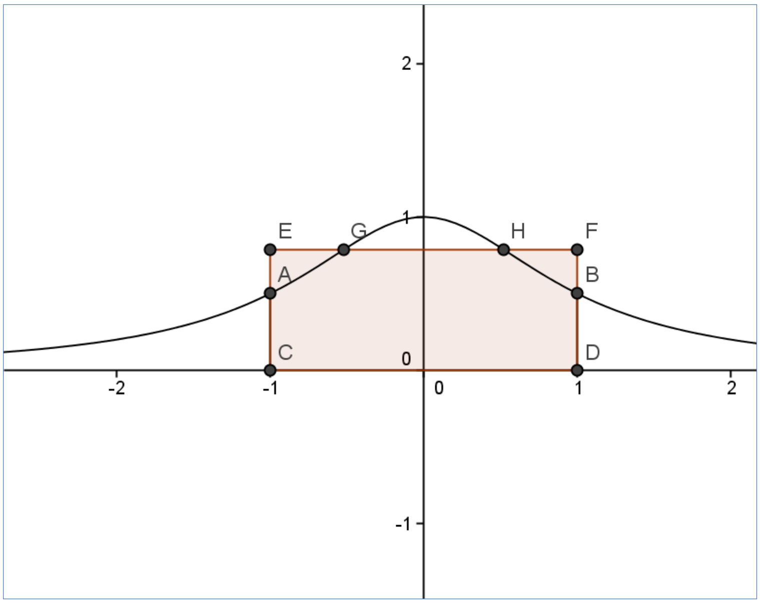


7) ***Si calcoli il valor medio della funzione*** $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ***nell'intervallo [-1:1] e se ne indichi il significato geometrico***

Valor medio di una funzione f(x) continua in un intervallo [a,b] : valore f(xo) tale che

$$f(x_0)\,(b-a) = \int_a^b f(x)dx \rightarrow$$

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \rightarrow \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}dx \rightarrow \frac{1}{2}[\tan^{-1} x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4}$$

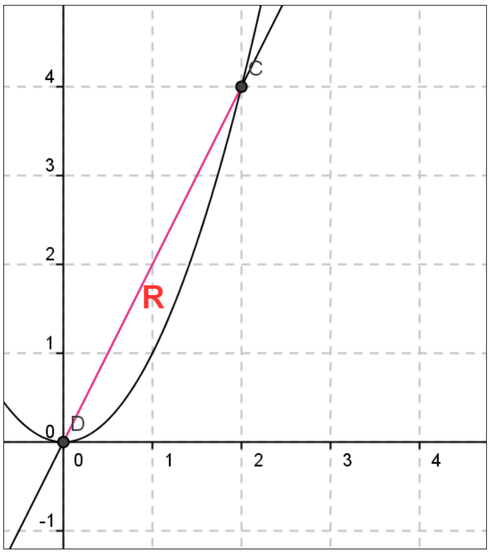


Significato geometrico :

l'area del rettangolo di base (b-a) e altezza f(xo) = area del trapezoide relativo a f(x) nell'intervallo [a;b]

Si può verificare direttamente l'uguaglianza delle due aree osservando che l'area della parte di piano racchiusa dalla curva e dal segmento GH è equivalente alla somma dei due triangoli mistilinei AEG e BFH

8.. ***La regione R è delimitata da y=2x e y =x² e ⍰ ⍰ ⍰⍰ come mostrato nella figura a lato. R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, hanno area*** $A(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$. ***Si determini il volume di W.***



)Metodo delle fette

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^2 \sin\frac{\pi}{2}x\, dx = \frac{4}{\pi}$$