Soluzione di Adriana Lanza

PROBLEMA.1

Nel sistema di riferimento cartesiano *Oxy* si consideri il quadrato *OABC*, dove *A= (1; 0)* e *C=(0; 1)*.

1. Sia *P* un punto appartenente al lato *AB*. Si considerino le parabole, con asse parallelo all'asse *y*, passanti per *O* e per P tangenti al lato *BC*. Quali sono i possibili vertici di tali parabole, al variare di *P* su *AB*?
2. Tra quelle sopra indicate, si dimostri che la parabola Γ_1, tale che il segmento parabolico limitato dalla corda *OP* abbia area pari alla metà del quadrato *OABC*, ha equazione $y = -3x^2 + 2\sqrt{3}x$.
3. Si determini l'equazione della parabola Γ_2 simmetrica di Γ_1 rispetto all'asse y e ci calcoli l'area della regione piana delimitata dalle parabole Γ_1, Γ_2 e dalla comune retta tangente nei loro vertici.
4. Sia r una retta di equazione $y = k$, con $k \in [0; 1]$ e siano Q e R i punti (più vicini all'asse *y*) in cui r taglia, rispettivamente, le parabole Γ_1 e Γ_2. Si determini il valore di k per cui risulti massima l'area del triangolo QCR

1)

Sia $P(1; t)$ con $0 \leq t \leq 1, un\ punto\ el\ segmento\ BC.$

Le parabole richieste, passanti per O, hanno equazione $y = ax^2 + bx$; il vertice V ha coordinate $\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-b^2}{4a}\right)$

La condizione di tangenza al lato BC (perpendicolare all'asse di simmetria) comporta che il vertice debba essere un punto del lato stesso, distinto da C.

Il punto di incontro con il lato BC è $P(1; a + b)$

Fissato un valore di t compreso tra 0 e 1, possiamo imporre due condizioni ai due parametri a e b

$\begin{cases} -\frac{b^2}{4a} = 1 \\ a + b = t \end{cases}$ con le limitazioni $\begin{cases} 0 < \frac{-b}{2a} \leq 1 \rightarrow \left(essendo\ a = -\frac{b^2}{4}\right)\ 0 < \frac{2}{b} \leq 1 \rightarrow b \geq 2 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

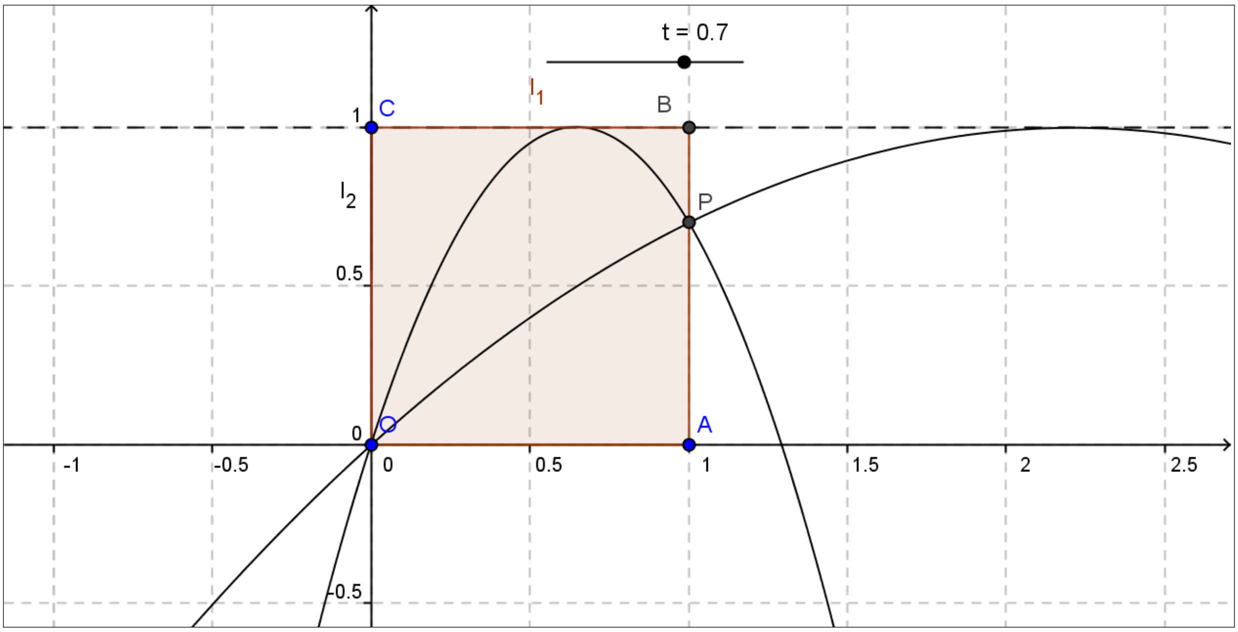
ovvero

$$\begin{cases} a = -\dfrac{b^2}{4} & & b \geq 2 \\ -\dfrac{b^2}{4} + b = t & \rightarrow b = 2(1 \pm \sqrt{1-t}\ ) & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Nella seconda condizione , solo la soluzione $b = 2\left(1 + \sqrt{1-t}\ \right)$ è compatibile con la condizione $b \geq 2$, mentre le limitazioni $0 \leq t \leq 1$ implicano l'ulteriore limitazione $b \leq 4$

La figura seguente mostra come, ad una determinata posizione di P sul lato AB, corrispondano due parabole passanti per O e tangenti alla retta y=1; una sola però è tangente al segmento CB

Soluzione di Adriana Lanza



In conclusione la famiglia di parabole ha equazione

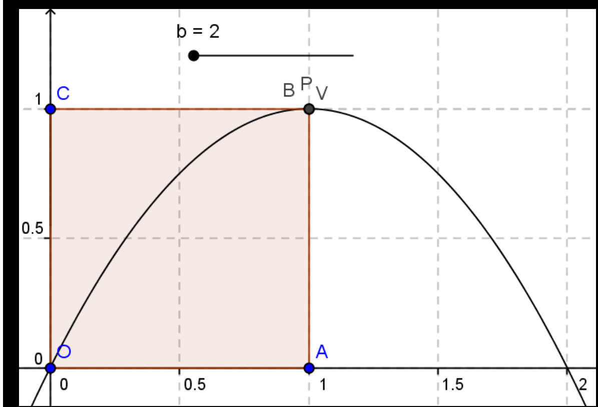
$y = -\frac{b^2}{4}x^2 + bx$

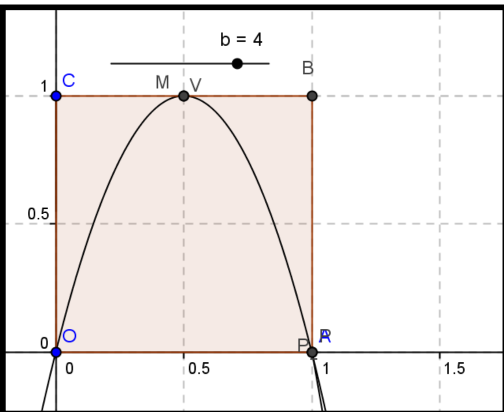
i vertici hanno coordinate

$V\left(\frac{2}{b}; 1\right)$

con le condizioni $2 \leq b \leq 4$

Casi limite

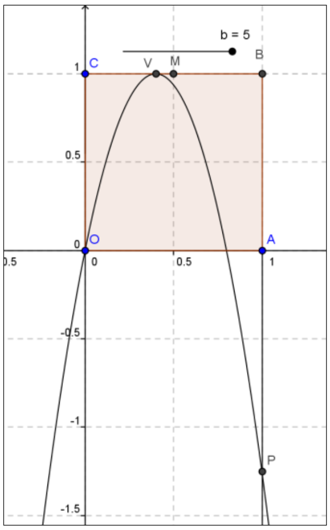




Primo caso limite $b = 2 \rightarrow\ V \equiv P \equiv B$

Secondo caso limite $b = 4 \rightarrow$
$P \equiv A\,;\ \ V\ \text{è}\ il\ punto\ medio\ del\ lato\ BC$

Soluzione di Adriana Lanza



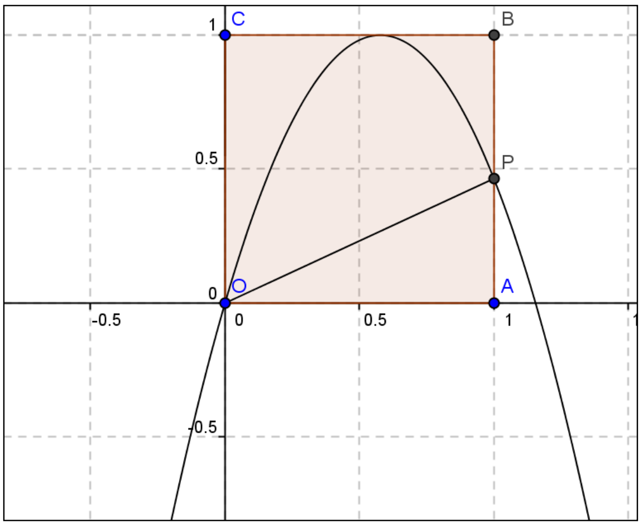
Pertanto:
il vertice V è un punto del segmento MB, estremi inclusi

2) Il punto P ha coordinate $(1;\ -\frac{b^2}{4}+b)$

La retta OP ha equazione $y=(-\frac{b^2}{4}+b)x$
Imponiamo che l'area del segmento parabolico di cui parla il testo, sia uguale a ½
$\int_0^1(-\frac{b^2}{4}x^2+bx+\frac{b^2}{4}x-bx)\,dx=\int_0^1(-\frac{b^2}{4}x^2+\frac{b^2}{4}x)\,dx=\frac{b^2}{4}[-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x]_0^1=\frac{1}{2}\rightarrow$

$$\frac{b^2}{4}\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\rightarrow b=\pm2\sqrt{3}$$

Dove solo la soluzione
$+2\sqrt{3}$
soddisfa le condizioni $2\leq b\leq 4$



Equazione della parabola Γ_1 $y=-3x^2+2\sqrt{3}x$

Vertice di Γ_1 $V(\frac{\sqrt{3}}{3};1)$

3) Data una curva di equazione y =f(x), la sua simmetrica rispetto all'asse y ha equazione y = f(-x), pertanto l'equazione di Γ_2 è

Soluzione di Adriana Lanza

$y = -3x^2 - 2\sqrt{3}x$

$Area = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}(1+3x^2-2\sqrt{3}x)dx = 2[x+x^3-\sqrt{3}x^2]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{27}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$

4) Risolviamo il sistema

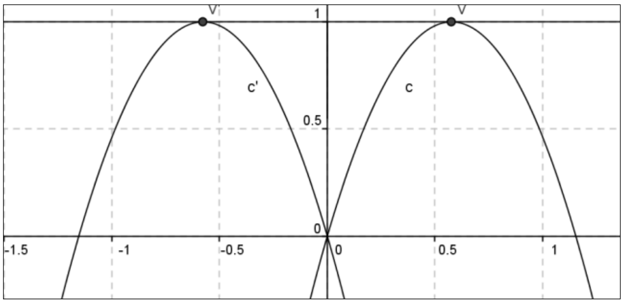
$$\begin{cases} y = & -3x^2+2\sqrt{3}x \\ y = & k \end{cases}$$

$x = \frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3-3k}}{3}$ y=k   0<k<1

Coordinate di Q $\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3-3k}}{3}\ ; k\right)$

Coordinate di R $\left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3-3k}}{3}\ ; k\right)$

Lunghezza del segmento RQ =2 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3-3k}}{3}$

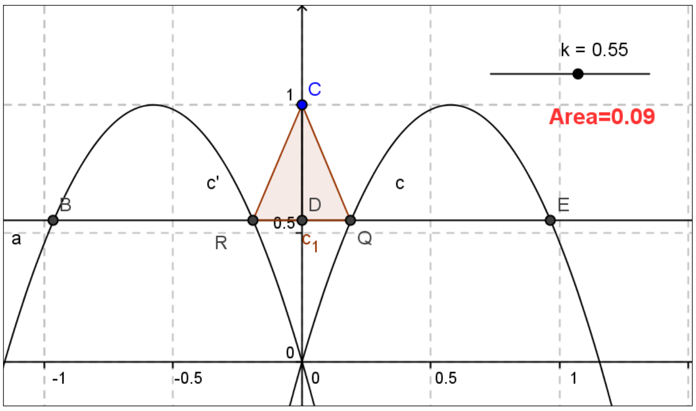


$Area\ del\ triangolo\ QCR = S(k) =$

$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3-3k}}{3}(1-\mathrm{k}) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1-\mathrm{k})(1-\sqrt{(1-\mathrm{k})}$

$$S'(k) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[-1+\sqrt{(1-\mathrm{k})} + (1-\mathrm{k})\frac{1}{2\sqrt{1-\mathrm{k}}}\right] =$$

$\frac{\sqrt{3}}{3}(-1+\sqrt{(1-\mathrm{k})}+\frac{\sqrt{(1-\mathrm{k})}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1+\frac{3\sqrt{(1-\mathrm{k})}}{2})$



Studio del segno di S’(k) e dell’andamento di S(k)

$$\frac{3\sqrt{(1-\mathrm{k})}}{2}-1 \geq 0 \quad \rightarrow 9(1-\mathrm{k}) \geq 4$$

$$\rightarrow \mathrm{k} \leq \frac{5}{9}$$

Soluzione di Adriana Lanza

$S'(k) \geq 0$ $\qquad 0 + + + + + + + + + \frac{5}{9} - - - - - - - 1$

$S(k)$ $\qquad \nearrow \qquad \searrow$

L'area del triangolo assume il valore massimo per $k=\frac{5}{9}$

$$S_{max} = \frac{4}{81}\sqrt{3}$$