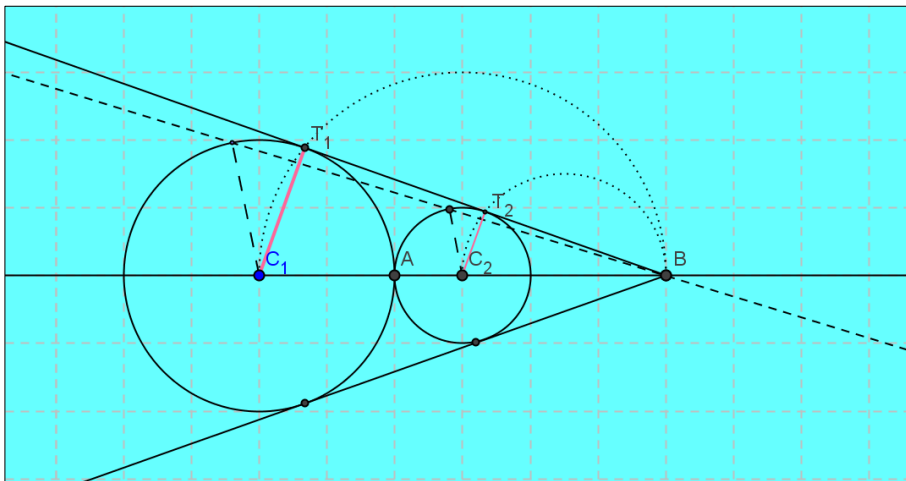


PROBLEMA 2

Una circonferenza di centro O e raggio 4 è tangente esternamente nel punto A ad un'altra circonferenza di raggio x minore di 4. Le tangenti comuni, non passanti per A, si incontrano in un punto B.

1. Si provi che, al variare di x , la distanza $f(x)$ di B da O è data da $f(x) = \frac{4x+16}{4-x}$; si disegni il grafico Γ di $f(x)$ prescindendo dai limiti posti ad x dal problema.
2. Sia P un punto di Γ . Si dimostri che la retta tangente a Γ in P incontra gli asintoti di Γ in due punti equidistanti da P. Si verifichi altresì che Γ ammette un centro di simmetria di cui si chiedono le coordinate.
3. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra Γ e gli assi coordinati.
4. Sia infine $g(x) = f(|x|)$. Quale il grafico di $g(x)$? Si determini, al variare di k il numero delle radici dell'equazione $g(x) = k$

SOLUZIONE



Dalla similitudine dei triangoli BT_1C_1 e BT_2C_2

$$\frac{\overline{BC_1}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{C_1T_1}}{\overline{C_2T_2}}$$

Ponendo $\overline{BC_1} = y$ $\overline{C_2T_2} = x$ $0 < x < 4$

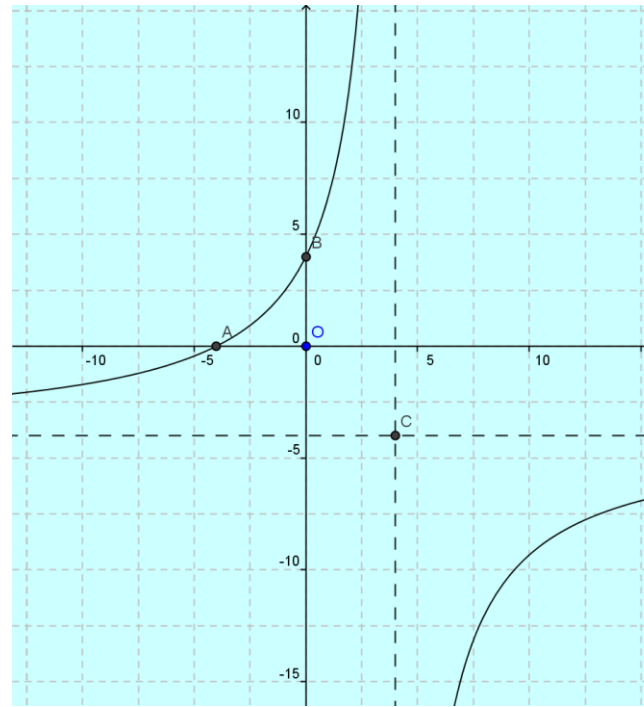
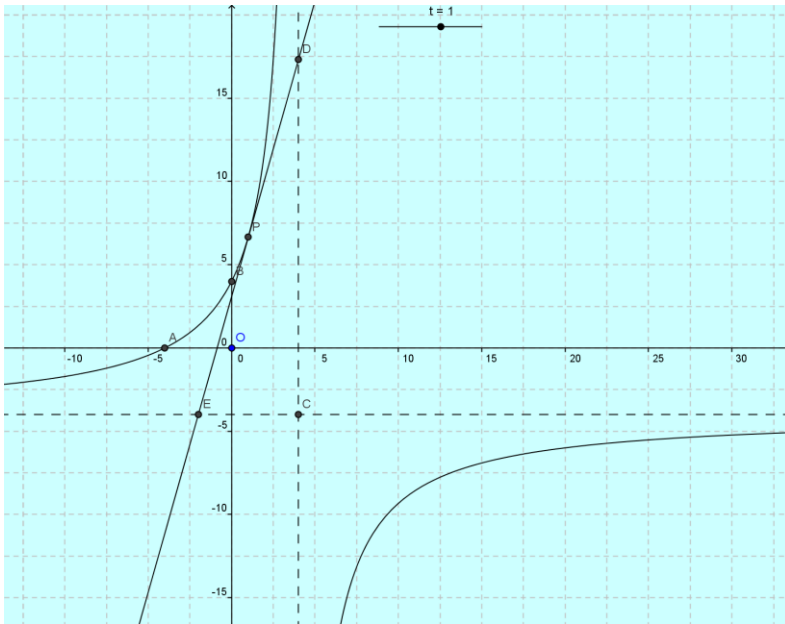
$$xy = 4[y - (4 + x)] \rightarrow (x - 4)y = -16 - 4x \rightarrow y = \frac{16 + 4x}{4 - x}$$

Studio di $f(x)$

La funzione è definita per ogni numero reale diverso da 4 (se si prescinde dai limiti geometrici) Si tratta di una funzione omografica, il cui grafico è un'iperbole equilatera di asintoti

$$x = 4 \quad y = -1$$

I punti di incontro con gli assi cartesiani sono $A(-4;0)$ e $B(0;4)$ La funzione è positiva nei punti interni all'intervallo $] -4; 4[$ e negativa nei punti interni



Volendo studiare la funzione con i metodi dell'analisi, osserviamo innanzi tutto che

$$\frac{16+4x}{4-x} = 4\left(-1 + \frac{8}{4-x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -4 \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \pm \infty$$

$$f'(x) = \frac{32}{(4-x)^2} \rightarrow f(x) \text{ sempre crescente}$$

2) Sia $P(t; f(t)) \rightarrow P(t; \frac{16+4t}{4-t})$ un punto di γ e

$y = f'(t)(x-t) + f(t) = \frac{32}{(4-t)^2}(x-t) + \frac{16+4t}{4-t}$ la relativa tangente.

Intersezioni con gli asintoti

$$D \begin{cases} y = \frac{32}{(4-t)^2}(x-t) + \frac{16+4t}{4-t} \\ x = 4 \end{cases} \quad E \begin{cases} y = \frac{32}{(4-t)^2}(x-t) + \frac{16+4t}{4-t} \\ y = -4 \end{cases}$$

$$E \begin{cases} -1 = \frac{8}{(4-t)^2}(x-t) + \frac{4+t}{4-t} \\ y = -4 \end{cases} \rightarrow -16 - t^2 + 8t = 8x - 8t + 16 - t^2 \rightarrow$$

$$x = -4 + 2t$$

$$D\left(4; \frac{48+4t}{4-t}\right) \quad E(-4 + 2t; -4)$$

Il punto medio del segmento DE

$$\begin{cases} x = \frac{4 - 4 + 2t}{2} = t \\ y = \frac{48 + 4t - 16 + 4t}{2(4 - t)} = \frac{16 + 4t}{4 - t} \end{cases}$$

Coincide con il punto P

La curva, essendo un'iperbole equilatera, ammette come centro di simmetria il punto di incontro degli asintoti $C(4; -4)$

Verifica diretta:

Indichiamo con γ' la trasformata della curva γ , rispetto alla simmetria di centro

$$C \begin{cases} x' = 8 - x \\ y' = -8 - y \end{cases}$$

La sua equazione è

$$-8 - y' = \frac{16 + 32 - 4x'}{4 - 8 + x'} \rightarrow y' = \frac{-32 + 64 - 8x' - 16 - 32 + 4x'}{-4 + x'} \rightarrow$$

$$y' = \frac{-16 - 4x'}{-4 + x'} = \frac{16 + 4x'}{4 - x'}$$

Poiché $\gamma' \equiv \gamma$, la curva è simmetrica rispetto a C..

Il procedimento, più generale, della verifica dell'esistenza di un centro di simmetria, presenta alcuni calcoli un po' laboriosi:

Siano

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$

le equazioni di una generica simmetria centrale, di centro $(x_0; y_0)$

La trasformata della curva γ ha equazione

$$\begin{aligned} 2y_0 - y' &= \frac{16 + 8x_0 - 4x'}{4 - 2x_0 + x'} \rightarrow y' = \frac{8y_0 - 4x_0y_0 + 2y_0x' - 16 - 8x_0 + 4x'}{4 - 2x_0 + x'} \\ &= -\frac{8y_0 - 4x_0y_0 - 16 - 8x_0 + (2y_0 + 4)x'}{-4 + 2x_0 - x'} \end{aligned}$$

Confrontando l'ultimo risultato con $f(x_0)$, osserviamo che, affinché coincidano i denominatori, deve essere $x_0 = 4$

Sostituendo si ottiene

$$y' = -\frac{8y_0 - 16y_0 - 16 - 32 + (2y_0 + 4)x'}{4 - x'} = \frac{8y_0 + 48 - (2y_0 + 4)x'}{4 - x'}$$

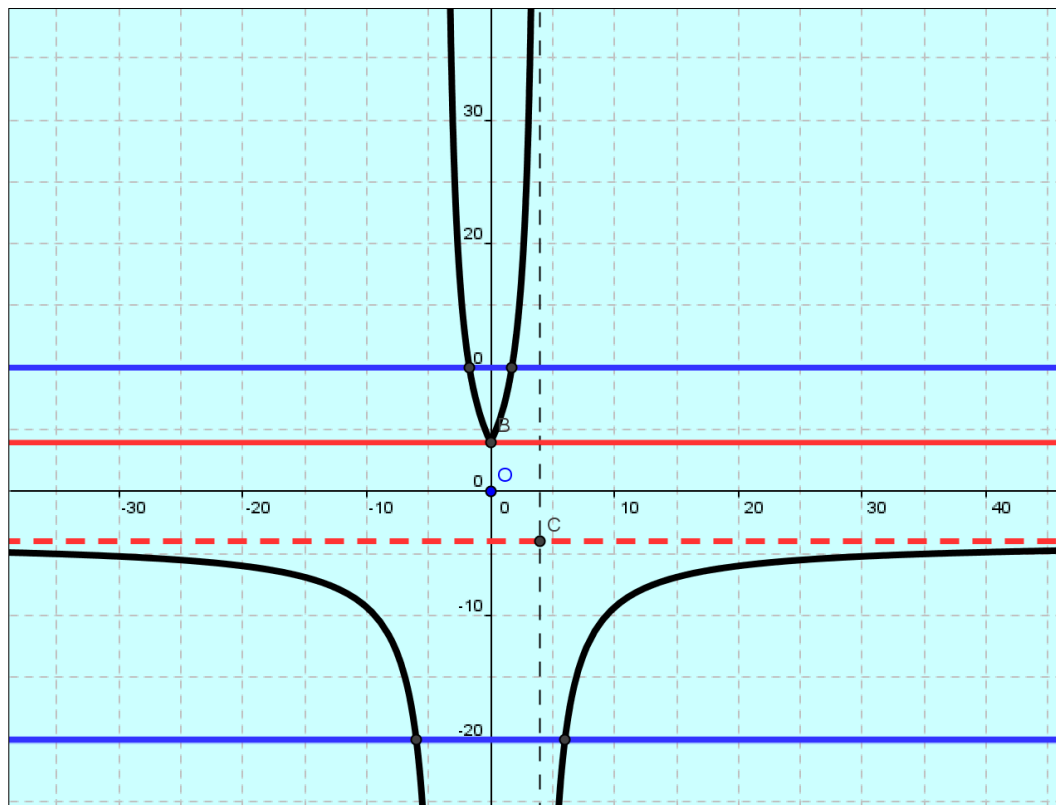
Imponendo $\begin{cases} 8y_0 + 48 = 16 \\ -(2y_0 + 4) = 4 \end{cases}$

si trova la soluzione $y_0 = -4$

3) Area =

$$\int_{-4}^0 \left(4 + \frac{32}{4-x}\right) dx = [-4x - 32 \ln(4-x)]_{-4}^0 = -32 \ln 4 - 16 + 32 \ln 8 = 32 \ln 2 - 16 \cong 6.18$$

4) Il grafico di $f(|x|)$ si ottiene da quello di $f(x)$ con una simmetria rispetto all'asse y della porzione di γ appartenente ai semipiano delle x positive



Soluzioni dell'equazione $g(x)=k$

Metodo grafico

- $k < -4$ due soluzioni reali e distinte
- $-4 \leq k < 4$ nessuna soluzione
- $k = 4$ due soluzioni reali e coincidenti

Soluzione di Adriana Lanza

- $k > 4$ due soluzioni reali e distinte