Soluzione di Adriana Lanza

PROBLEMA 1

Data una semicirconferenza di diametro AB = 2, si prenda su di essa un punto P e sia M la proiezione di P sulla retta perpendicolare in B ad AB.

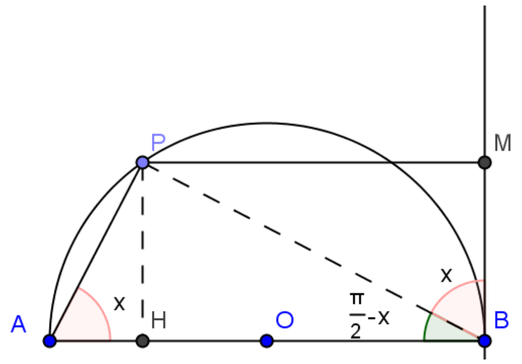
1. Si esprima la somma $\overline{AP}$ + $\overline{PM}$ in funzione di x = $P\hat{A}B$

2. Si studi la funzione f (x) così ottenuta e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $[0; 2\pi]$, mettendo in evidenza poi la parte di grafico compatibile con i dati del problema.

3. Si dimostri che γ è simmetrica rispetto alla retta x = π.

4. Si calcoli l'area della regione piana, limitata dalla curva γ, dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione $x = \frac{\pi}{3}$

1)



. $P\hat{A}B$ =x $\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

Casi limite x=0→$\overline{AP} = 2\ \ \overline{PM} = 0$ $\qquad x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \overline{AP} = 0\ \ \overline{PM} = 2$

$\overline{AP} = \overline{\mathrm{AB}} \cos \mathrm{x}$

$\overline{BP} = \overline{\mathrm{AB}} \sin \mathrm{x} \qquad \overline{PM} = \overline{\mathrm{PB}} \sin \mathrm{x} = \overline{\mathrm{AB}} \sin^2 \mathrm{x}$

$$\overline{AP} + \overline{\mathrm{PM}} = 2(\cos \mathrm{x} + \sin^2 \mathrm{x})$$

2)Funzione periodica di periodo 2π

Studio della funzione nell'intervallo $[0; 2\pi]$

f(0)=f(2π)=2

Studio del segno della derivata prima e andamento della funzione

$$f'(x) = 2(-\sin x + 2 \sin \mathrm{x} \cos \mathrm{x})$$

$0 + + + + + + + + \frac{\pi}{3} - - - - - - - - - \pi + + + + + + + + + + + \frac{5}{3}\pi - - - - - - - - - 2\pi$

Soluzione di Adriana Lanza

Massimi relativi $\left(\frac{\pi}{3};\frac{5}{2}\right)$ $\left(\frac{5\pi}{3};\frac{5}{2}\right)$ Minimo relativo $(\pi;-2)$

In 0 e in 2π si hanno altri due minimi relativi per f(x)

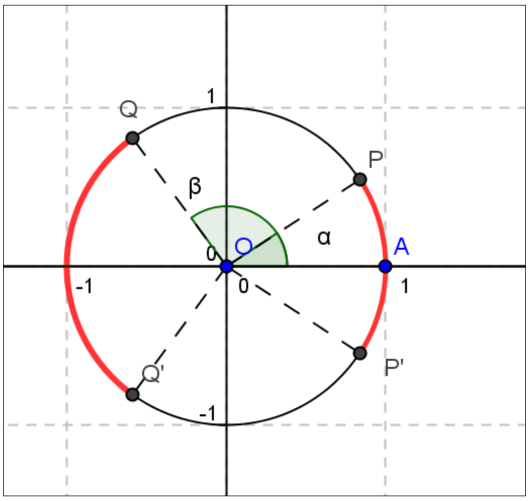
Massimo assoluto $\frac{5}{2}$ Minimo assoluto -2

Studio del segno della derivata seconda e concavitò della curva

$f''(x) = 2(-\cos x + 2cos^2 x - 2sin^2 x)=2(4cos^2 x - \cos x - 2)$

$f''(x) = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1\pm\sqrt{33}}{8} \rightarrow \quad \cos x = \frac{1-\sqrt{33}}{8} \cong -0{,}59 \quad \cos x = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \cong 0{,}84$

$f''(x) > 0 \rightarrow \cos x < \frac{1-\sqrt{33}}{8} \quad \cup \quad \cos x > \frac{1+\sqrt{33}}{8}$



Sia

$\alpha = \cos^{-1}\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ $\quad\beta = \cos^{-1}\frac{1-\sqrt{33}}{8}$

$f''(x) > 0$ in corrispondenza degli archi evidenziati in rosso

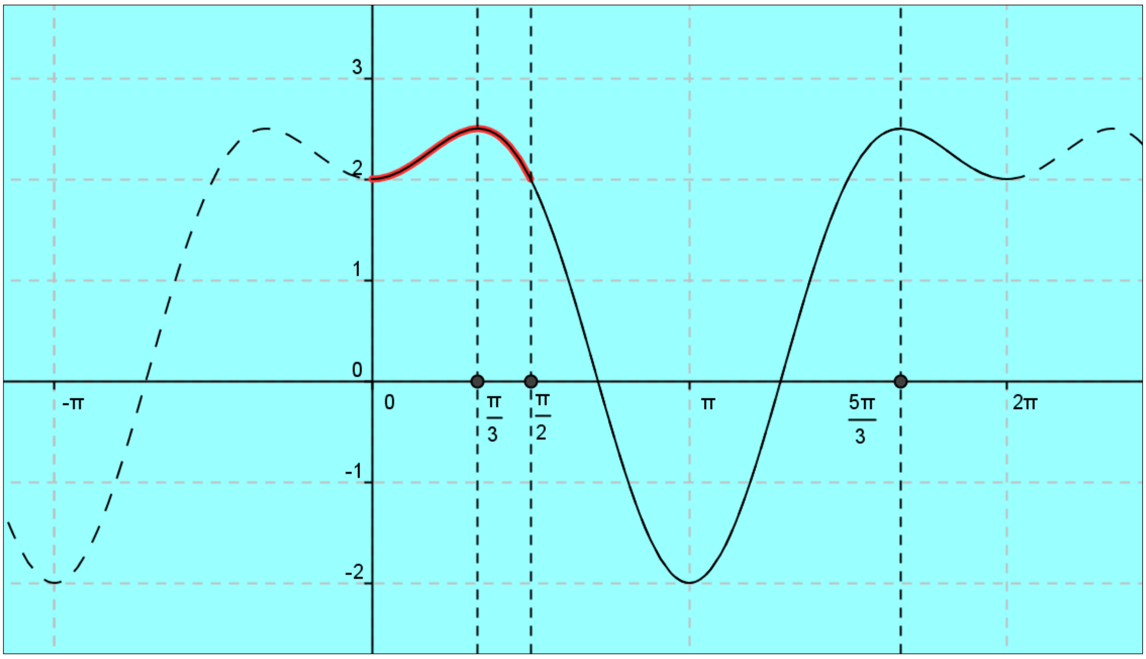
Concavità verso

0++++++ α----------------------β ++++++++ 2π-β -------------------2π-α+++++2π

l'alto il basso l'alto il basso l'alto

La curva ha 4 flessi in [0;2π]

GRAFICO



L’arco di curva evidenziato in rosso rappresenta la parte di grafico compatibile con i limiti geometrici

3) $f(2\pi\text{-}x) = f(x)$

Infatti $2(\cos(2\pi - x) + \sin^2(2\pi - x) = 2(\cos x + \sin^2 x)$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2(\cos x + \sin^2 x)dx = \left[2\sin x + x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}$