

PROBLEMA N.2

In una semicirconferenza di diametro AB di lunghezza 2, è inscritto un quadrilatero convesso $ABCD$ avente il lato CD uguale al raggio.

I prolungamenti dei lati AD e BC si incontrano in un punto E .

- 1. Si provi che, qualunque sia la posizione dei punti C e D sulla semicirconferenza:**

$$D\hat{A}C = D\hat{B}C = \frac{\pi}{6} \quad A\hat{E}B = \frac{\pi}{3}$$

- 2. Se $x = D\hat{A}B$ si provi che la somma $\overline{CE} + \overline{DE}$ in funzione di x è data da**

$$f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$$

Qual è l'intervallo di variabilità della x ? Qual è il valore massimo assunto da $\overline{CE} + \overline{DE}$?

- 3. Posto $g(x) = k \sin(x + \varphi)$ si trovino k e φ in modo che sia $g(x) = f(x)$**

- 4. Si tracci, a prescindere dai limiti geometrici del problema, il grafico Γ di $f(x)$ e si denoti con R la regione delimitata, per $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{11}{6}\pi\right]$, dall'asse x e da Γ . Si calcoli l'area di R e si calcoli altresì il volume del solido generato da R nella rotazione attorno all'asse x .**

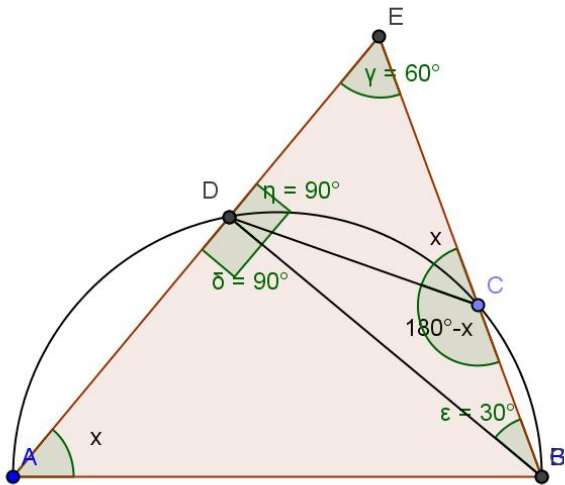
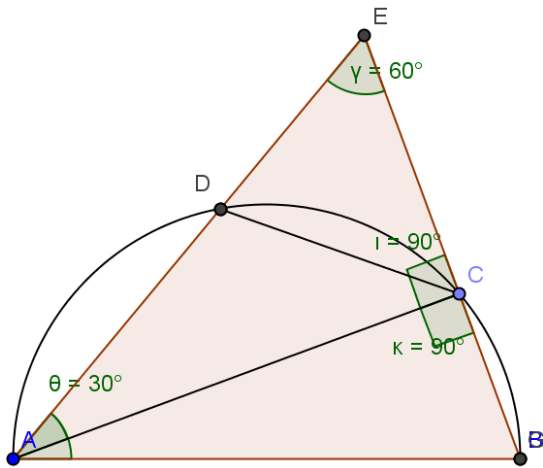
- 1.** Essendo $\overline{CD} = r$, dal Teorema della corda si deduce che $D\hat{A}C = D\hat{B}C = \frac{\pi}{6}$

Essendo il triangolo ACE rettangolo in C (e il triangolo BDE rettangolo in D), l'angolo in E ha misura $\frac{\pi}{3}$

Inoltre, poiché nel quadrilatero $ABCD$ gli angoli opposti sono supplementari, si ha che gli angoli $D\hat{A}B$ e $D\hat{C}E$ sono uguali perché supplementari dello stesso angolo $D\hat{C}B$

I triangoli ABE e CDE sono simili avendo gli angoli ordinatamente uguali.

Il rapporto di similitudine è $1/2$



2. Posto $D\hat{A}B = x$ con $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

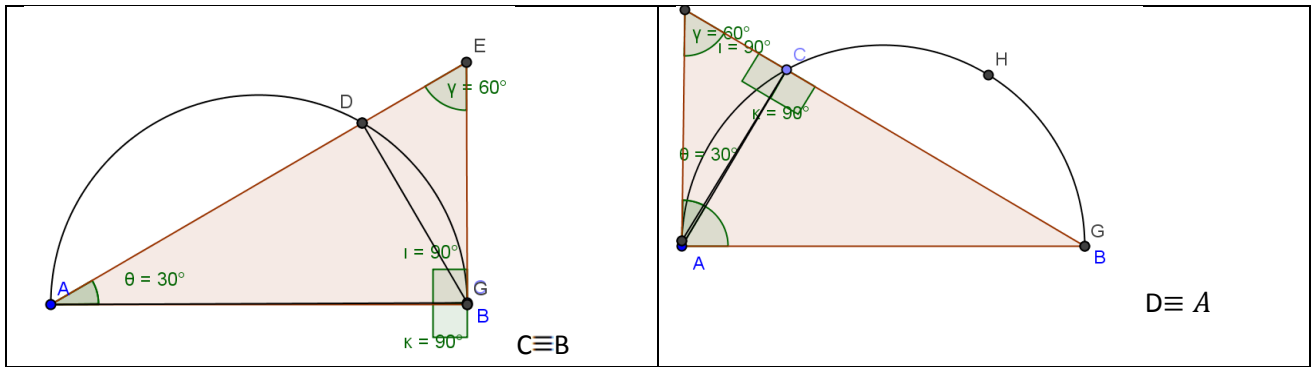
applicando il Teorema dei seni al triangolo CDE

$$\frac{\overline{DE}}{\sin x} = \frac{\overline{CE}}{\sin(\frac{\pi}{3} + x)} = \frac{\overline{CD}}{\sin \frac{\pi}{3}} \rightarrow$$

$$\overline{DE} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \sin x \quad \overline{CE} = \frac{2}{3}\sqrt{3}(\sin \frac{\pi}{3} \cos x + \cos \frac{\pi}{3} \sin x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x$$

$$\overline{CE} + \overline{DE} = f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$$

Casi limite

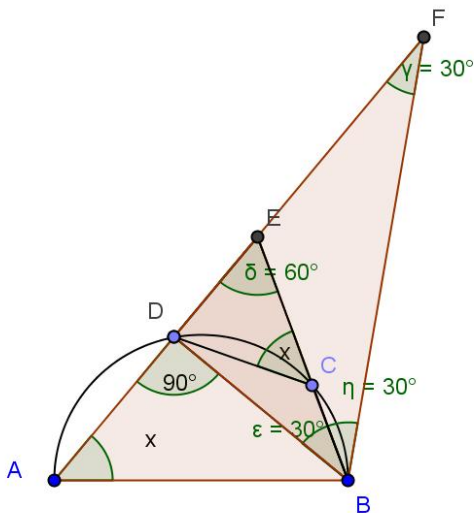


$$x = \frac{\pi}{6} \rightarrow \overline{CE} + \overline{DE} = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \overline{CE} + \overline{DE} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Allo stesso risultato si perviene con la seguente costruzione



Da B si conduce una semiretta che forma con il segmento BE un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ e sia F il punto in cui incontra il prolungamento del segmento AE.

Il segmento AF è equivalente alla somma dei segmenti AE e BE, infatti

il triangolo BEF ha due angoli uguali ed è pertanto isoscele $\rightarrow \overline{EF} = \overline{BE}$

Essendo

Soluzione di Adriana Lanza

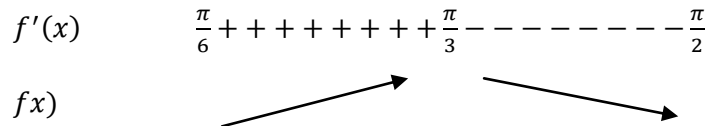
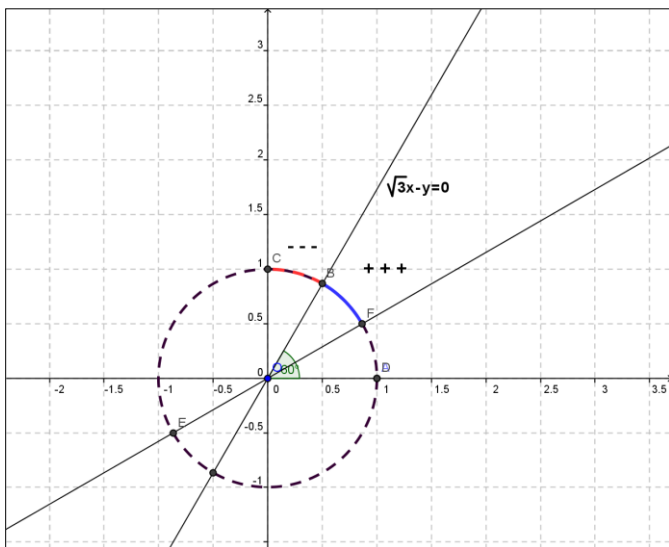
$$\overline{AD} = 2 \cos x \quad \overline{BD} = 2 \sin x \quad \overline{DF} = \overline{BD} \sqrt{3} \rightarrow \overline{AF} = \overline{AE} + \overline{BE} = 2 \cos x + 2\sqrt{3} \sin x$$

Essendo, per la similitudine dimostrata nel punto 1, $\overline{CE} + \overline{DE} = \frac{1}{2}(\overline{AE} + \overline{BE}) \rightarrow$

$$\overline{CE} + \overline{DE} = \sqrt{3} \sin x + \cos x$$

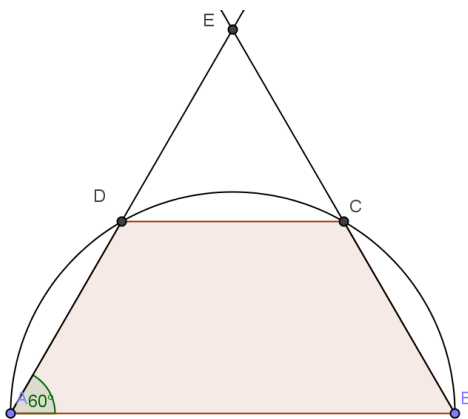
Il valore massimo si può determinare studiando il segno della derivata $f'(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x$

Metodo grafico



Il valore massimo si ha per $x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \overline{CE} + \overline{DE} = 2$

Il quadrilatero è un trapezio isoscele



Agli stessi risultati si può pervenire per altra via, dopo aver risolto il quesito 3.

3. $f(x)$ è una combinazione lineare di $\sin x$ e $\cos x$ quindi si può scrivere nella forma

$k \sin(x + \varphi)$ dove k e φ sono due costanti da determinare utilizzando l'identità

$$k \sin(x + \varphi) = k(\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) \rightarrow$$

$$k \cos \varphi \sin x + k \sin \varphi \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x \rightarrow$$

$$\begin{cases} k \sin \varphi = 1 \\ k \cos \varphi = \sqrt{3} \end{cases}$$

Da cui, quadrando e sommando) $k=2$

e(dividendo membro a membro)

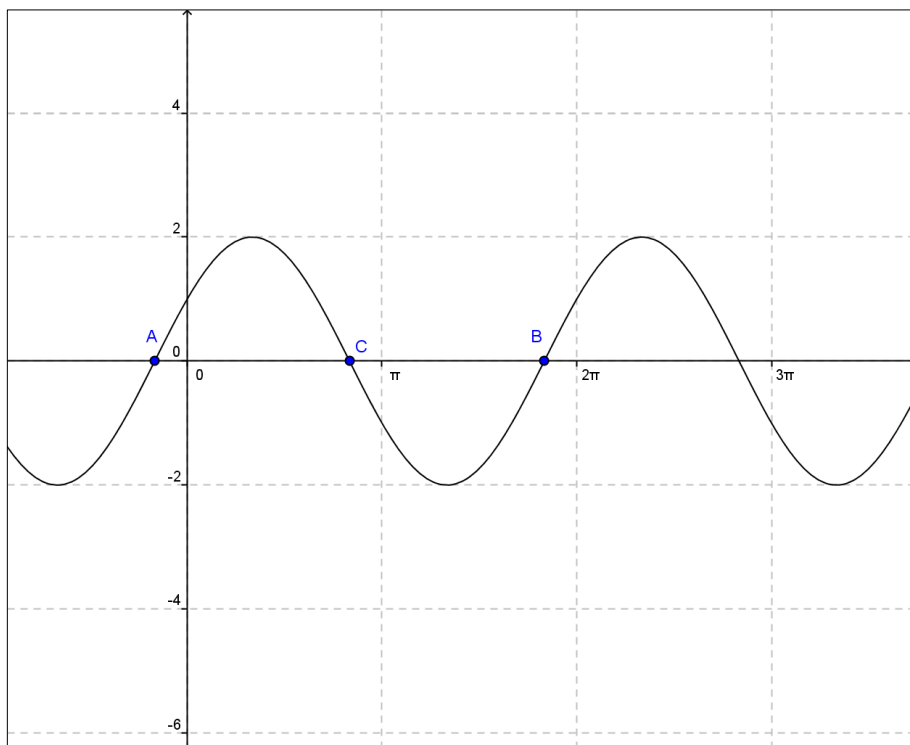
$$\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

La funzione $f(x)$ è pertanto una senoide di ampiezza 2, periodo 2π e fase $\frac{\pi}{6}$

4. Rispetto al grafico di $y=\sin x$, Γ è dilatato di 2 sull'asse delle ordinate e traslata di $-\frac{\pi}{6}$ sull'asse delle ascisse

Il massimo valore è 2 e il valore corrispondente di x si trova imponendo $\begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow$

$$x = \frac{\pi}{3}$$



Il segmento AB evidenziato nel grafico corrisponde all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{11}{6}\pi\right]$

di ampiezza pari ad un periodo. Il punto C corrisponde a $x = \frac{5}{6}\pi$

Area di R

$$2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx = 4 \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = 4[1+1] = 8$$

$$d) V = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 4 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx$$

$$\text{Calcoliamo } 4 \int \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx = 4 \int \frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{2} dx = 2x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + c \rightarrow$$

$$\text{Calcoliamo } 4 \int \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx = 4 \int \frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{2} dx = 2x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + c \rightarrow$$

$$V = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 4 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx = 2\pi \left[2x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} =$$

$$2\pi \left[2\pi - \sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\pi [2\pi - \sin(2\pi) + \sin(0)] = 4\pi^2$$