

QUESITI

QUESITO 1

Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la *geometria euclidea* non è più vera perché per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di *geometria non euclidea*. Silvio ha ragione? Si motivi la risposta.

Risposta con approfondimento

Silvia ha torto.

La scoperta delle Geometrie non euclidee non porta ad un superamento della Geometria euclidea in termini di verità o validità; possiamo dire piuttosto che induce una revisione critica dei fondamenti della Geometria, del suo valore conoscitivo e del suo rapporto con la realtà fisica.

Fino al secolo XIX era valido quello che potremmo definire paradigma euclideo, fondato su una concezione assiomatica di tipo contenutistico con le seguenti caratteristiche :

- 1) i concetti primitivi sono evidenti e le proposizioni prime sono immediatamente vere (criterio di verità)
- 2) l'evidenza ai concetti derivati è trasmessa tramite la definizione, la verità alle proposizioni derivate (teoremi) è trasmessa tramite la dimostrazione
- 3) La Geometria fornisce una descrizione corretta delle proprietà dello spazio fisico e delle figure geometriche in esso contenuto, le quali a loro volta sono le idealizzazioni dei corpi materiali.

La scoperta delle Geometrie non euclidee fa crollare queste certezze : i principi perdono il carattere di verità evidente, garantita dall'intuizione

L'unica certezza che ci si può aspettare è quella che deriva dalla non contraddittorietà, una certezza quindi di carattere logico.

Viene meno quindi anche il primato della geometria euclidea nella capacità di adattarsi al mondo fenomenico e sorgono nuove problematiche intorno all'interrogativo : Quale geometria descrive il mondo in cui viviamo?

Le prime risposte, di posizione decisamente empirista (le verità geometriche non hanno validità assolute ma possono essere controllate sperimentalmente, come le leggi fisiche) furono ben presto abbandonate, sia per le difficoltà legate alla raccolta dei dati sperimentali, sia per la loro discutibile valenza concettuale.

Una geometria fisica, infatti, presuppone che alla descrizione geometrica adottata corrispondano certe assunzioni sugli oggetti utilizzati nell'esperimento (per esempio le linee rette vengono rappresentate da regoli supposti indeformabili o raggi luminosi che si ipotizza viaggino in linea retta). Questa interdipendenza fa sì che, qualunque siano i risultati sperimentali, è sempre possibile sostenere la validità di qualunque sistema geometrico, a patto di modificare le ipotesi ausiliarie.

Se, per esempio, misurando gli angoli interni di un triangolo formato dalle traiettorie di tre raggi di luce,

trovassimo che la loro somma non è uguale ad un angolo piatto, potremmo indifferentemente concludere che

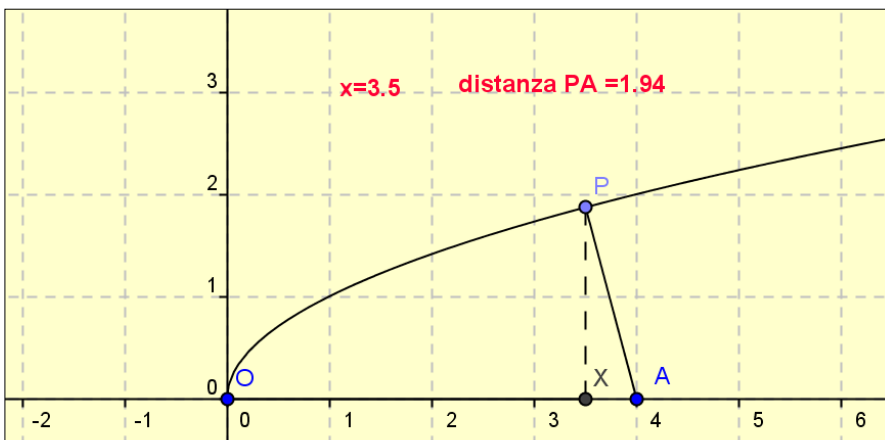
- ✓ I raggi luminosi si propagano in linea retta e lo spazio non è euclideo
oppure
- ✓ Lo spazio è euclideo, ma i raggi luminosi non hanno descritto una traiettoria rettilinea per qualche causa fisica.

Secondo Poincaré una geometria non può essere più vera di un'altra. Salva la imprescindibile necessità di evitare ogni contraddizione, la scelta della geometria è libera. Tuttavia, se una geometria non può essere più vera di un'altra, può comunque essere più comoda.

Einstein esprime il suo pensiero sui rapporti tra geometria e Fisica nella conferenza dal titolo Geometria ed esperienza (1921). <<Nella misura in cui le proposizioni matematiche si riferiscono alla realtà , esse non sono certe; e nella misura in cui esse sono certe, non si riferiscono alla realtà>> ; in seguito però opta per un criterio empirico nella scelta della geometria di Riemann nella Relatività generale.

In conclusione una Geometria, ovvero un sistema ipotetico-deduttivo non avrà più una funzione conoscitiva, ma avrà il compito di aiutare la ricerca, guidando lo scienziato nel distinguere il percorso più comodo e più semplice e nella selezione degli assiomi più utili a fornire un orientamento nel mondo dei fatti empirici.

2) Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4;0)



Indicato con $P(x; \sqrt{x})$ un generico punto della curva, il valore di x per cui è minima

$$d = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$$

è lo stesso per cui è minimo il suo quadrato:

$$d^2 = (x-4)^2 + x = x^2 - 7x + 16$$

Associando alla funzione quadratica una parabola con la concavità verso l'alto, si ha il valore minimo in corrispondenza del vertice, la cui ascissa è $\frac{7}{2}$

Distanza minima $\sqrt{\frac{15}{4}} \cong 1.94$ Punto più vicino $P(\frac{7}{2}; \sqrt{\frac{7}{2}})$

3) Sia R la regione delimitata, per $x \in [0, \pi]$, dalla curva $y = \sin x$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y . Si calcoli il volume di W .

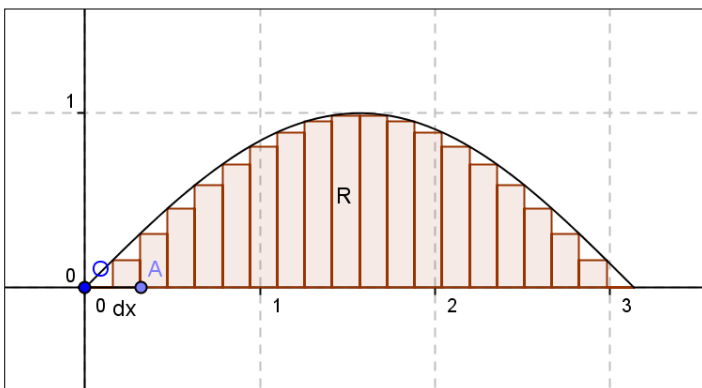
. Il volume di W si ottiene calcolando: $2\pi \int_0^\pi x \sin x \, dx = 2\pi[-x \cos x + \sin x]_0^\pi = 2\pi^2$

dove l'integrale $\int x \sin x \, dx$ è stato calcolato col metodo di integrazione per parti

$$-x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c$$

Si deve fare riferimento al metodo di integrazione per <<gusci cilindrici>>

Sia R la regione limitata dalla curva di equazione $y = \sin x$ e l'asse x , nell'intervallo $[0; \pi]$ e V il volume generato dalla rotazione di R intorno all'asse y



Pensiamo la regione R decomposta in tanti rettangolini, come quelli rappresentati in figura, ognuno dei quali genera un solido pari alla differenza di due cilindretti, in modo che, intuitivamente potremo pensare V come somma progressiva di infiniti gusci cilindrici coassiali di spessore dx , aventi per basi corone circolari, dove il raggio interno x varia da 0 a π (integrazione “a cipolla” o a “gusci

cilindrici”

Il volume del guscio (infinitesimo) può essere calcolato nel modo seguente:

$$\pi((x + dx)^2 - x^2) \sin x \quad \{Area\ della\ corona\ circolare\ per\ l'altezza\}$$

che, trascurando l'infinitesimo di ordine superiore dx^2 , si riduce a $2\pi x \sin x \, dx$

Allo stesso risultato si perviene applicando il Teorema di Guldino: il volume del guscio sarà uguale al prodotto dell'area del rettangolino $\sin(x) \, dx$ per la lunghezza della linea generata dal suo baricentro, la circonferenza di lunghezza $2\pi x$.

Procedendo in modo più rigoroso, se n è il numero dei gusci (ovvero il numero degli intervalli in cui è stato suddiviso l'intervallo $[0; \pi]$) e Δx_i l'ampiezza del generico intervallo, possiamo scrivere

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n 2\pi x_i \sin x_i \Delta x_i = \int_0^\pi 2\pi x \sin x \, dx = 2\pi \int_0^\pi x \sin x \, dx$$

per definizione di integrale definito

4) Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n .

$$\binom{n}{4} = \binom{n}{3} \text{ deve essere } n \geq 4$$

$$\frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} \rightarrow \frac{1}{4 \cdot 3!(n-4)!} = \frac{1}{3!(n-3)(n-4)!} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{n-3} \rightarrow n = 7$$

Più velocemente si arriva al risultato ricordando le proprietà di simmetria dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(elementi equidistanti dagli estremi nella riga n -sima del triangolo di Tartaglia)

5) In una delle sue opere, G. Galilei considera l'insieme N dei numeri naturali ("i numeri tutti") e il suo sottoinsieme dei quadrati perfetti e scrive: «... se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Quale risposta (motivata) all'interrogativo posto?

La risposta è: **Non è così.**

L'insieme dei numeri che sono quadrati perfetti, che indicheremo con N_q , è un sottoinsieme proprio dell'insieme N di tutti i numeri naturali; trattandosi però di insiemi infiniti, possiamo affermare che «il tutto contiene la parte» ma non che il tutto è maggiore della parte.

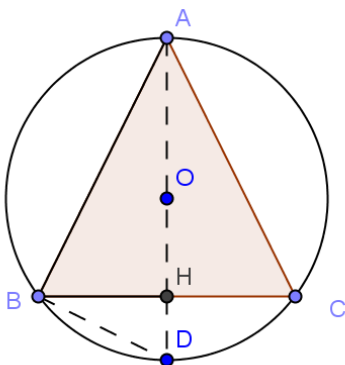
Infatti, poiché tra gli elementi N e di N_q si può costruire una corrispondenza biunivoca,

$$n \leftrightarrow n^2$$

possiamo affermare che i numeri quadrati sono *tanti quanti* i numeri naturali.

Nella Teoria degli Insiemi si dice che i due insiemi sono **equipotenti**

6) Di tutti i coni iscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?



$$\overline{AO} = r \quad \overline{AH} = x \quad 0 < x < 2r$$

$$\overline{DH} = 2r - x \quad \overline{AB} = \sqrt{2rx} \quad \overline{BH} = \sqrt{x(2r - x)}$$

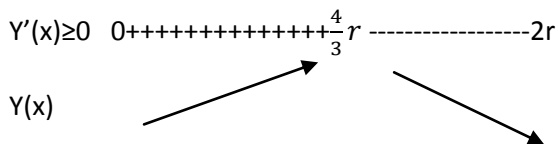
$$S_l = \pi \overline{BH} * \overline{AB} = \pi \sqrt{x(2r - x)} \sqrt{2rx} = \pi \sqrt{2r(2rx^2 - x^3)} \quad 0 < x < 2r$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} S_l = \lim_{x \rightarrow 2r} S_l = 0$$

La funzione è invece sempre positiva in $]0, 2r[$, quindi assume il valore massimo in corrispondenza dello stesso valore di x per cui è massimo il suo quadrato

$$\text{Consideriamo la funzione } Y = 2r\pi^2(2rx^2 - x^3)$$

Studiamo il segno di $Y' = 2r\pi^2(4rx - 3x^2)$ e l'andamento di $Y(x)$ nell'intervallo $]0, 2r[$,



Il valore massimo si ottiene per $x = \frac{4}{3}r$

Essendo $r = 10$ cm, si ottiene

$$\overline{AH} = \left(\frac{40}{3}\right) \cong 13,33 \text{ cm}$$

7) Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?

Si tratta di un problema di prove ripetute di tipo bernoulliano, ovvero di una sequenza di n prove con le seguenti caratteristiche:

- il risultato di ogni prova può essere solo “successo” o “fallimento”;

- il risultato di ciascuna prova è indipendente dai risultati delle prove precedenti;
- la probabilità p di “successo”, e quindi la probabilità $q = 1 - p$ di “fallimento”, sono costanti in ciascuna prova.

Sia X la variabile aleatoria [numero di risposte esatte = successo]

In ciascuna prova $p = \frac{1}{4}$ $1 - p = \frac{3}{4}$

La distribuzione di probabilità è di tipo binomiale

Distribuzione binomiale: $P(X=k) = C_{10,k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}$

$$P(X=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \quad P(X=1) = 10 \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^9$$

$$P(k \geq 2) = 1 - \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{10} + 10 \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^9 \right] = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^9 \left(\frac{3}{4} + \frac{10}{4}\right) = 1 - 13 \frac{3^9}{4^{10}} \cong 75\%$$

QUESITO 8)

8) In che cosa consiste il problema della quadratura del cerchio? Perché è citato così spesso?

Risposta con approfondimento

La **quadratura del cerchio**, assieme al problema della trisezione dell'angolo e a quello della duplicazione del cubo, è uno dei più noti problemi classici dell'antichità, la cui soluzione grafica richiede strumenti diversi da quelli <<ammessi>> dalla geometria greca, la riga e il compasso.

PREMESSA

Eeguire costruzioni con riga e compasso significa, partendo da almeno due punti sul piano, compiere un numero finito di operazioni con due strumenti "ideali": la riga (per tracciare rette) e il compasso (per tracciare circonferenze). Le operazioni di base impiegate negli *Elementi* sono quelle descritte nei primi tre postulati del libro primo:

1. È possibile condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto;
2. È possibile prolungare illimitatamente in linea retta un segmento finito;
3. È possibile descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio

Un problema si dice **risolubile con riga e compasso** quando può essere ricondotto ad una **sequenza finita di operazioni scelte tra le seguenti**

1. dati due punti, costruire la retta passante per essi;
2. dato un punto ed un segmento, trovare la circonferenza che ha quel punto come centro e quel segmento come raggio;

3. date due rette, trovarne (se esiste) il punto comune;
4. date una retta ed una circonferenza, trovarne (se esistono) i punti comuni;
5. date due circonferenze, trovarne (se esistono) i punti comuni.

Questo significa che operando con riga e compasso, possiamo individuare solo punti le cui coordinate si ottengono **risolvendo successivamente equazioni di I oppure equazioni di II grado o comunque riconducibili a equazioni di II grado.**

Un numero reale associato ad una costruzione siffatta si dirà costruibile con riga e compasso

Dunque: un numero reale α non è costruibile con riga e compasso se:

- a) **non è algebrico** (non è soluzione di alcuna equazione algebrica a coefficienti interi)
- b) **soddisfa un'equazione algebrica $f(x)=0$, dove $f(x)$ è un polinomio, irriducibile a coefficienti razionali, il cui grado non è una potenza di 2**

LA QUADRATURA DEL CERCHIO

Il problema , consiste nel costruire , con uso esclusivo di riga e compasso, un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio , ovvero nel costruire un segmento lungo $\sqrt{\pi}$, a partire dal segmento unità. Essendo π , ed anche la sua radice quadrata, un numero trascendente (non algebrico), non è costruibile con riga e compasso.

Fino a quando non fu dimostrata la trascendenza di π ,da Ferdinand von Lindemann, nel 1882, molti erano stati i tentativi della quadratura del cerchio, tutti infruttuosi, anche se alcuni matematici pervennero a soluzioni approssimate di notevole interesse.

Questo spiega perché l'espressione era (ed è) diventata sinonimo di un'impresa ardua , di enorme difficoltà o addirittura vana, senza speranza o priva di un significato concreto. Nota è la citazione da parte di Dante , nell'ultimo canto del Paradiso:

Qual è 'l geomètra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,
tal era io a quella vista nova:
veder voleva come si convenne
l'imgo al cerchio e come vi s'indova;

I versi citati tentano di spiegare la presenza contemporanea, nel Verbo, della natura umana e di quella divina. La difficoltà di questa spiegazione è paragonata a quello che può essere considerato il problema principe della geometria classica, appunto la quadratura del cerchio.

QUESITO 9

Si provi che nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

Sia ABC un triangolo rettangolo in C , sia M il punto medio dell'ipotenusa AB ed r la retta perpendicolare in M al piano π del triangolo. Il punto M è equidistante da A , da B e da C .

Dimostriamo che la retta r è il luogo geometrico dei punti equidistanti da i tre vertici

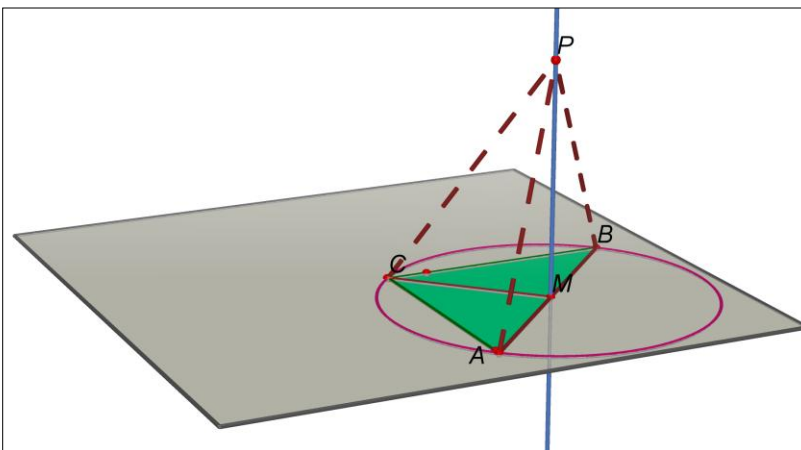
PRIMO METODO

Per dimostrare che la retta r è il luogo geometrico dei punti equidistanti da i tre vertici dobbiamo mostrare che:

a) ogni punto P di r è equidistante da A, B e C

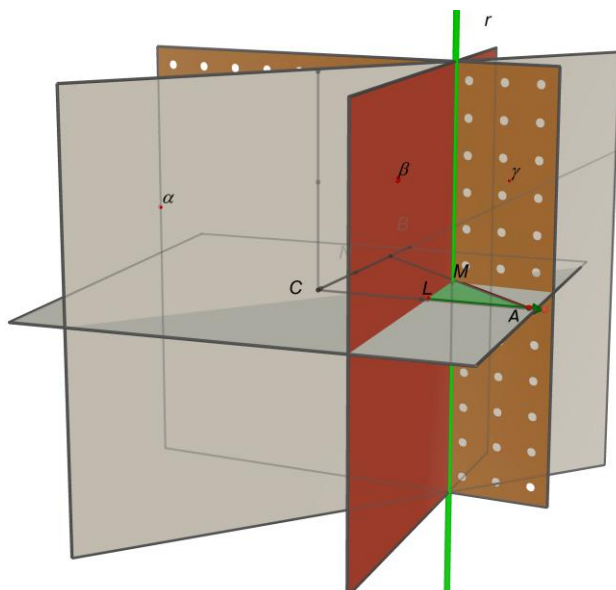
Essendo $MA=MB=MC$, i triangoli rettangoli PMC, PMB e PMA , aventi in comune il cateto PM , sono tra loro congruenti; pertanto risulta $PA=PB=PC$

b) ogni punto P equidistante da A, B e C appartiene ad r



Se P è un punto tale che $PA=PB=PC$, i triangoli PMC, PMB e PMA sono tra loro congruenti per il terzo criterio di uguaglianza. Poiché il triangolo PAB è isocele, la mediana PM è anche altezza e quindi i triangoli PMB e PMA sono rettangoli e di conseguenza sarà rettangolo anche il triangolo PMC .

La retta PM , essendo perpendicolare a due rette del piano di ABC , è perpendicolare al piano stesso e quindi coincide necessariamente con r .



SECONDO METODO

Il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e da B è il piano α perpendicolare in M ad AB

Il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e da C è il piano β perpendicolare ad AC nel suo punto medio L

Il luogo geometrico dei punti equidistanti da C e da B è il piano γ perpendicolare a BC nel suo punto medio N

I tre piani α, β e γ sono tutti e tre perpendicolari al piano π in cui giace il triangolo e devono contenere il punto M.

La retta comune ad α e a β , essendo perpendicolare a π e dovendo passare per M, coincide con r

La retta comune ad α e a γ , essendo perpendicolare a π e dovendo passare per M, coincide con r

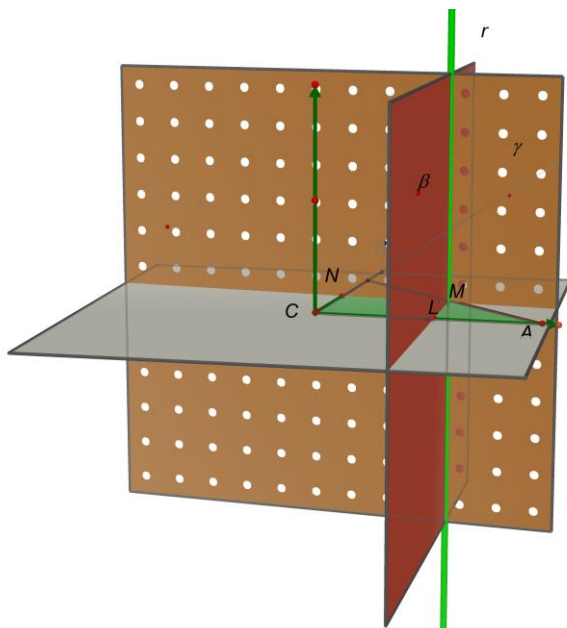
Si conclude pertanto che la retta r, appartenendo ad α , a β e a γ , è il luogo geometrico dei punti equidistanti da A, da B e da C

TERZO METODO

Introduciamo un riferimento cartesiano avente l'origine nel vertice C dell'angolo retto, l'asse x e l'asse y coincidenti con le rette cui appartengono i due cateti, l'asse z coincidente con la retta perpendicolare a π nel punto C.

Poniamo:

$C(0,0,0)$ $A(a,0,0)$ $B(0,b,0)$ da cui segue



$$M\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$$

Indichiamo con $P(x,y,z)$ un generico punto dello spazio e imponiamo che

$$\overline{PC} = \overline{PA} = \overline{PB} \quad \text{ovvero}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y - b)^2 + z^2 \end{cases}$$

Dopo le opportune semplificazioni si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases}$$

Le due equazioni rappresentano, rispettivamente, il piano β perpendicolare a CA e passante per il suo punto medio L, il piano γ , perpendicolare a CB e passante per il suo punto medio N. Entrambi i piani passano per M e sono perpendicolari al piano xy.

Il luogo geometrico richiesto è pertanto la retta intersezione di β e γ , ovvero la retta perpendicolare in M al piano xy.

La retta suddetta coincide proprio con la retta r .

10) PRIMA OSSERVAZIONE : Se il grafico di f fosse I , f' non potrebbe assumere valori negativi, quindi non potrebbe corrispondere a nessuno degli altri 2 grafici
Pertanto devono essere scartate le risposte A e B

SECONDA OSSERVAZIONE Dai grafici si evince che II è una funzione pari, mentre le altre due sono funzioni dispari.
Poiché la derivata di una funzione pari, non costante, è una funzione dispari e viceversa, devono essere scartate le risposte C ed E

Risposta esatta D

oppure

Se il grafico di f fosse I , f' non potrebbe assumere valori negativi, quindi non potrebbe corrispondere a nessuno degli altri 2 grafici
Pertanto devono essere scartate le risposte A e B

Se il grafico di f fosse II , f' potrebbe avere come grafico I pertanto deve essere scartata le risposte
C

Se il grafico di f fosse III , f' potrebbe corrispondere a II e , in tal caso, f'' potrebbe corrispondere a I

Risposta esatta D