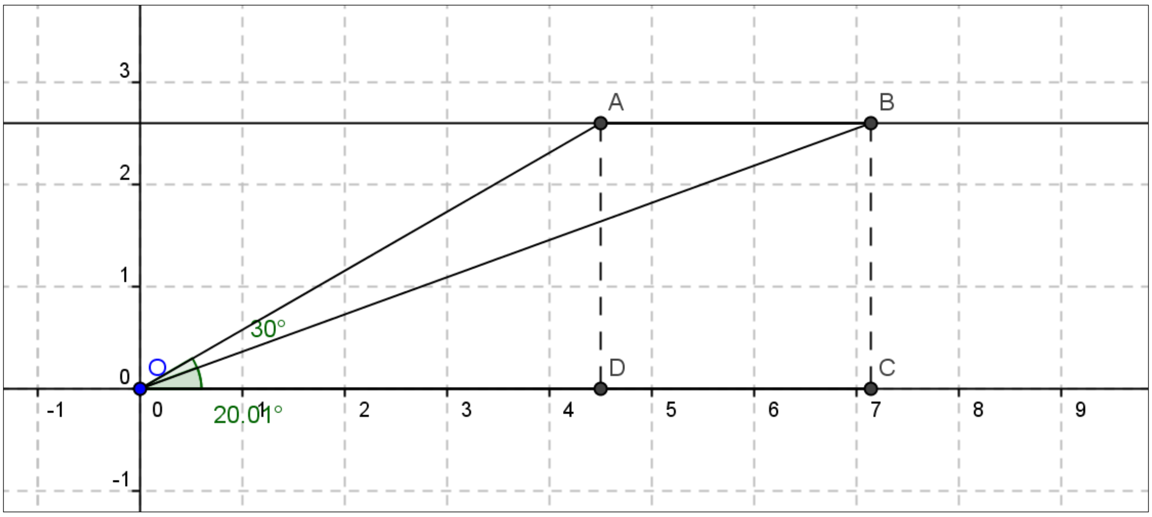
QUESTIONARIO

1. ***Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di 30°. Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a 20°, con che velocità si stanno spostando gli uccelli?***



Il punto O rappresenta l'osservatore, il punto A e il punto Bsono le posizioni successive degli uccelli, a distanza temporale di un minuto; i segmenti AD=BC rappresentano la quota h.

La distanza AB può essere calcolata dopo aver osservato che

$\overline{OD} = \frac{h}{\tan 30°} = 450\ m$ $\overline{OC} = \frac{h}{\tan 20°} \cong 714\ m$

Essendo $\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{OC} - \overline{OD} \cong 264\ m$ la velocità degli uccelli è di circa (264:60= 4.4) m/s)

2. ***La funzione:***

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{(e^{\frac{1}{x}} - 1)^2}}$$

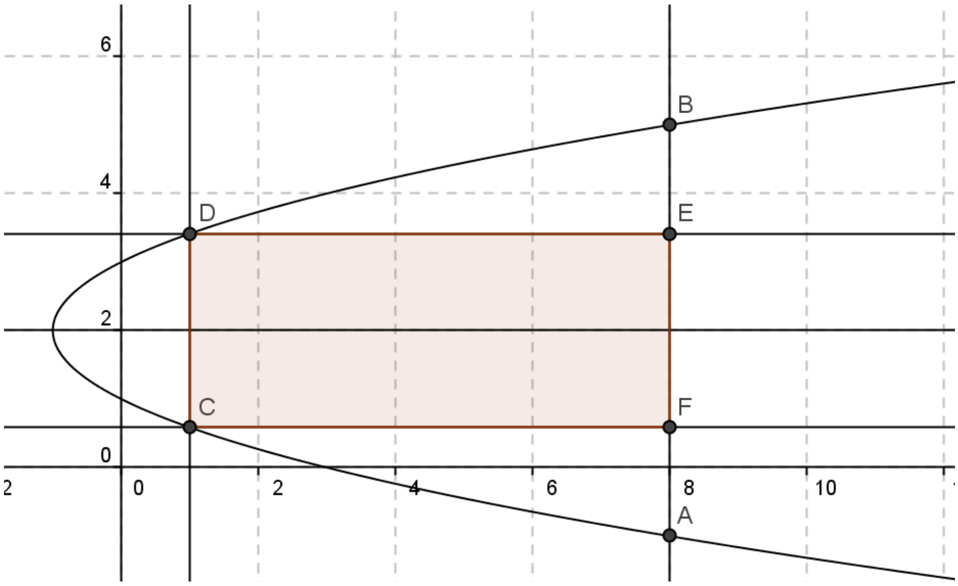
non è definita nel punto x = 0, che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della f(x) per x tendente a zero da sinistra e per x tendente a zero da destra.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ $\quad in\ quanto\ \frac{1}{x}\ tende\ a -\infty\ \ e\ \ e^{\frac{1}{x}}$ tende a 0

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ $\quad in\ quanto\ \frac{1}{x}\ tende\ a +\infty\ \ e\ \ e^{\frac{1}{x}}$ tende a $+\infty$

La discontinuità è di prima specie

3. ***La retta di equazione x = 8 seca la parabola di equazione x = y² – 4y + 3 nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base AB si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di 180° intorno all'asse della parabola***



L'asse della parabola è la retta y=2

Il vertice è il punto (-1:2)

Le intersezioni della parabola con una retta di equazione x=k sono

$C(k; 2-\sqrt{1+k})$ $D(k; 2+\sqrt{1+k})$

In particolare, per k =8; si trovano i punti A(8;-1) e B(8;5)

il cilindro generato dal rettangolo DEFC in una rotazione di 180° intorno all'asse della parabola ha il raggio pari $\frac{\overline{CD}}{2}$=$\sqrt{1+k}$ e altezza pari a $\overline{DE}$= 8-k

Il volume è uguale a V(k)= $\pi(1+k)(8-k) = \pi(-k^2+7k+8)$

Poiché una funzione quadratica, con il coefficiente del termine di secondo grado negativo,corrisponde ad una parabola con la concavità verso il basso, il valore massimo è l'ordinata del vertice.

Possiamo affermare quindi che il cilindro di volume massimo si ottiene per k= $\frac{7}{2}$

4. ***Si determini il campo di esistenza della funzione:***
$f(x) = (3 \cos x + sen^2 x - 3)^{\cos x}$
Che cosa succederebbe se l'esponente fosse sen x?

La funzione f(x) corrisponde ad una potenza a esponente reale, operazione che perde significato ,nel campo reale , quando la base è negativa o nulla .

Studiamo il segno e gli eventuali zeri della base *$3 \cos x + sen^2 x - 3 = 3 \cos x - \cos^2 x - 2$*

Poiché gli zeri del trinomio $-x^2+3x-2$ sono $\mathbf{x} = \frac{-3\pm1}{-2}$

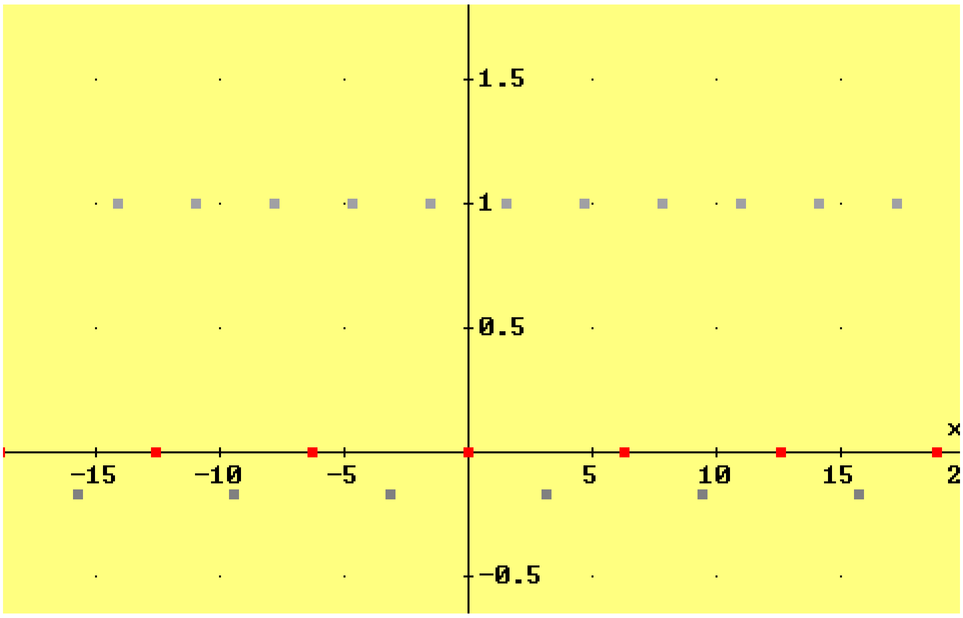
possiamo scomporre in fattori il polinomio $-\cos^2 x + 3\cos x - 2 = -(\cos x - 1)(\cos x - 2)$

E' facile a questo punto osservare che si annulla se $\cos x = 1 \ \rightarrow x = 2k$ e che per tutti gli altri valori di x assume valori negativi,

il dominio di f(x) va ristretto quindi ai soli valori di x per cui l'esponente assume valori interi, pertanto

a) $x = 2k\pi \ \rightarrow \ \cos x = 1 \rightarrow f(x) = 0^1 = 0$
b) $x = (2k+1)\pi \ \rightarrow \ \cos x = -1 \rightarrow f(x) = (-6)^{-1} = -\frac{1}{6}$
c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \cos x = 0 \rightarrow f(x) = -2^0 = 1$

GRAFICO



Con l'esponente sen(x) si fa un ragionamento analogo

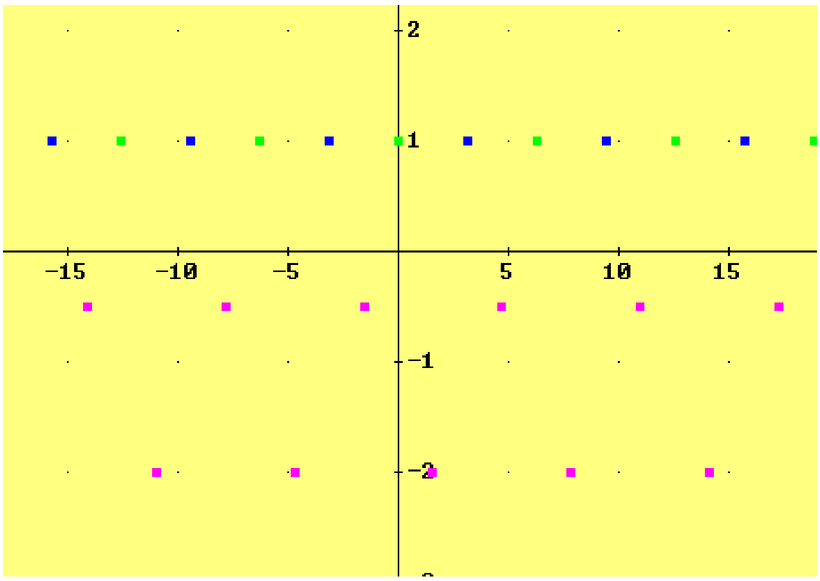
a) $x = 2k\pi \ \rightarrow \ \sin x = 0 \rightarrow f(x) = \ 0^0 = forma\ priva\ di\ significato\ algebrico\ :$
   clicca qui *per approfondire*

b) $x = (2k+1)\pi \ \rightarrow \ \sin x = 0 \rightarrow f(x) = \ (-6)^0 = 1$

c) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \sin x = 1 \rightarrow f(x) = \ -2^1 = -2$

d) $x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \ \sin x = -1 \rightarrow f(x) = \ -2^{-1} = -\frac{1}{2}$

GRAFICO



Da notare: nel grafico, ottenuto con DERIVE, compaiono anche i punti di ascissa $2k\pi$, avendo assegnato il valore 1 all'espressione 0^0

5. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$, nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

$$Valor\ medio = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \rightarrow \int_0^1 e^x(x^2 + x + 1)dx$$

Calcoliamo una primitiva di f(x) con il metodo di integrazione per parti

$$\int e^x(x^2 + x + 1)dx = e^x(x^2 + x + 1) - \int e^x(2x+1)\,dx$$

$$= e^x(x^2 + x + 1) - e^x(2x+1) + \int 2e^x dx =$$

$$e^x(x^2 + x + 1) - e^x(2x+1) + 2e^x = e^x(x^2 - x + 2)$$

$\int_0^1 e^x (x^2 + x + 1)dx = 2e - 2$

6.Si dica se l'equazione:
2 sen x + 2 cos x = 3+2 ˣ
ha soluzione.

Scriviamo il primo membro nella forma

$$2\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

che rappresenta una sinusoide il cui valore massimo è $2\sqrt{2} \cong 2{,}8$
L'equazione non ha soluzioni in quanto i due membri non possono mai assumere lo stesso valore, essendo il primo sempre inferiore a 3 e il secondo sempre maggiore di 3.

7. Si domanda quale rapporto bisogna stabilire tra lo spigolo dell'ottaedro regolare e lo spigolo del cubo affinché i due solidi abbiano volumi uguali.

$V_{ottaedro} = \frac{1}{3} l_{ottaedro}^3 \sqrt{2}$
$V_{cubo} = l_{cubo}^3$

I due volumi sono uguali se $\frac{l_{ottaedro}}{l_{cubo}} = \sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt{2}}} \cong 1{,}28$

8. Si dimostri che la seguente proposizione è vera: "Se il grafico di una funzione razionale intera f (x) è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, allora il grafico della sua derivata f ' (x) è simmetrico rispetto all'origine".

La proposizione è vera in quanto conseguenza del teorema, più generale,
<<***Se f(x) è una funzione derivabile e se f(x) è pari, allora f'(x) è dispari (e viceversa).***>>
Il teorema è vero anche nel caso particolare di una funzione costante, in quanto la sua derivata è y=0 , funzione che va considerata sia pari che dispari
Dimostrazione nel caso specifico richiesto:
Una funzione f(x) (algebrica) razionale intera il cui grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, corrisponde ad un polinomio in cui compaiono solo potenze pari di x →(f(-x)= f(x)).
Poiché la derivata di $x^n = n\,x^{n-1}$, se f(x) non è una costante ,f'(x) conterrà solo potenze dispari di x e il suo grafico sarà simmetrico rispetto all'origine (f'(-x)= -f'(x).)
La proposizione è vera anche se f(x) è costante, poiché la sua derivata sarà y=0, il cui grafico è ancora simmetrico rispetto all'origine.

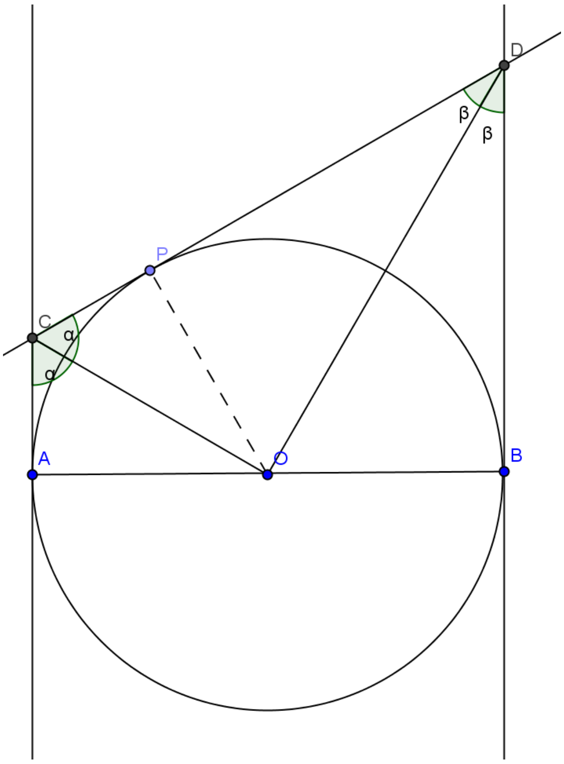
9. Si calcoli il limite della funzione

$$\frac{e^{x^3}-1}{x\sin^2 x}$$

quando x tende a 0

Forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$
Applicando la regola di de l'Hospital e, nel secondo passaggio, dividendo il numeratore e il denominatore per x^2,

$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2e^{x^3}}{\sin^2 x+2x\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{x^3}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}+2\frac{\sin x}{x}\cos x}=1$ (ricordando che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$)



10. Data una circonferenza di centro O, si conducano negli estremi A e B di un suo diametro AB le tangenti e siano C e D i punti d'intersezione di esse con una terza tangente alla circonferenza.
Si dimostri che l'angolo CÔD è retto.

Le rette CO e DO sono bisettrici degli angoli $A\hat{C}D$ e $B\hat{D}C$, rispettivamente, per le proprietà delle tangenti ad una circonferenza, condotte da un punto esterno.

Gli angoli $A\hat{C}D$ e $B\hat{D}C$ sono tra loro supplementari perché angoli coniugati interni, rispetto alle parallele AC e BD , tagliate dalla trasversale CD

$$\rightarrow 2\alpha + 2\beta = \pi \rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Pertanto il triangolo COD , avendo due angoli acuti tra loro complementari , è necessariamente rettangolo $\rightarrow C\hat{O}D = \frac{\pi}{2}$

–