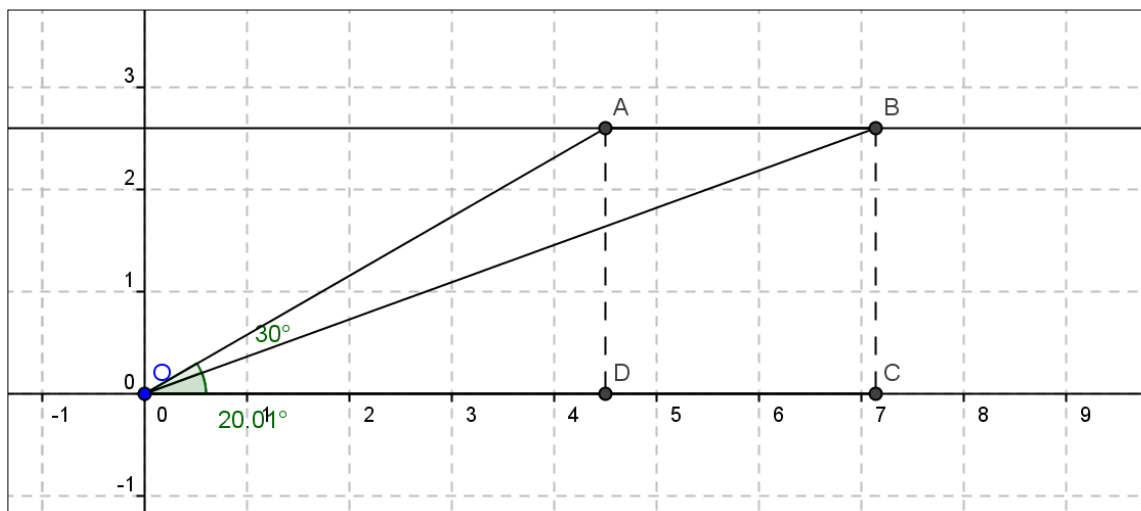


**QUESTIONARIO**

1. Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di  $30^\circ$ . Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a  $20^\circ$ , con che velocità si stanno spostando gli uccelli?



Il punto O rappresenta l'osservatore, il punto A e il punto B sono le posizioni successive degli uccelli, a distanza temporale di un minuto; i segmenti  $AD=BC$  rappresentano la quota  $h$ .

La distanza  $AB$  può essere calcolata dopo aver osservato che

$$\overline{OD} = \frac{h}{\tan 30^\circ} \cong 450,34 \text{ m}$$

$$\overline{OC} = \frac{h}{\tan 20^\circ} \cong 714,33 \text{ m}$$

Essendo  $\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{OC} - \overline{OD} \cong 264 \text{ m}$

la velocità degli uccelli è di circa  $(264:60= 4.4) \text{ m/s}$

2. La funzione:

$$f(x) = \frac{1}{(e^{\frac{1}{x}} - 1)^2}$$

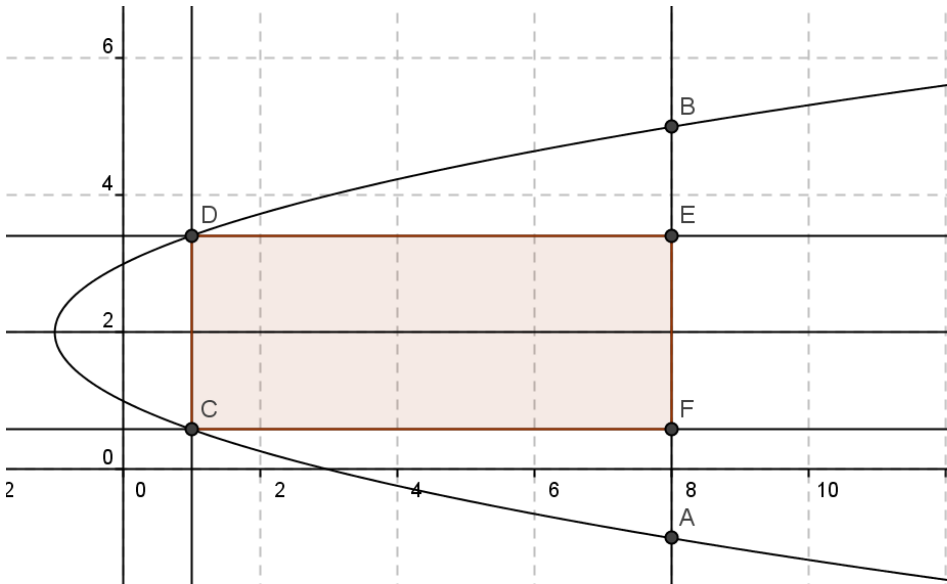
non è definita nel punto  $x = 0$ , che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della  $f(x)$  per  $x$  tendente a zero da sinistra e per  $x$  tendente a zero da destra.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \quad \text{in quanto } \frac{1}{x} \text{ tende a } -\infty \text{ e } e^{\frac{1}{x}} \text{ tende a } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \text{in quanto } \frac{1}{x} \text{ tende a } +\infty \text{ e } e^{\frac{1}{x}} \text{ tende a } +\infty$$

La discontinuità è di prima specie

3. La retta di equazione  $x = 8$  seca la parabola di equazione  $x = y^2 - 4y + 3$  nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base AB si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di  $180^\circ$  intorno all'asse della parabola



L'asse della parabola è la retta  $y=2$

Il vertice è il punto  $(-1;2)$

Le intersezioni della parabola con una retta di equazione  $x=k$  sono

$$C(k; 2 - \sqrt{1+k}) \quad D(k; 2 + \sqrt{1+k})$$

In particolare, per  $k=8$ ; si trovano i punti  $A(8;-1)$  e  $B(8;5)$

il cilindro generato dal rettangolo DEFC in una rotazione di  $180^\circ$  intorno all'asse della parabola ha il raggio pari  $\frac{CD}{2} = \sqrt{1+k}$  e altezza pari a  $DE = 8-k$

$$\text{Il volume è uguale a } V(k) = \pi(1+k)(8-k) = \pi(-k^2 + 7k + 8)$$

Poiché una funzione quadratica, in cui il coefficiente del termine di secondo grado sia negativo, corrisponde ad una parabola con la concavità verso il basso, il valore massimo è l'ordinata del vertice.

Possiamo affermare quindi che il cilindro di volume massimo si ottiene per  $k = \frac{7}{2}$

4. Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$f(x) = (3 \cos x + \sin^2 x - 3)^{\cos x}$$

Che cosa succederebbe se l'esponente fosse  $\sin x$ ?

La funzione  $f(x)$  corrisponde ad una potenza a esponente reale, operazione che perde significato, nel campo reale, quando la base è negativa o nulla.

Studiamo il segno e gli eventuali zeri della base  $3 \cos x + \sin^2 x - 3 = 3 \cos x - \cos^2 x - 2$

Poiché gli zeri del trinomio  $-x^2+3x-2$  sono  $x = \frac{-3 \pm 1}{-2}$

possiamo scomporre in fattori il polinomio  $-\cos^2 x + 3 \cos x - 2 = -(\cos x - 1)(\cos x - 2)$

E' facile a questo punto osservare che si annulla **se  $\cos x = 1 \rightarrow x = 2k$**  e **che per tutti gli altri valori di x assume valori negativi,**

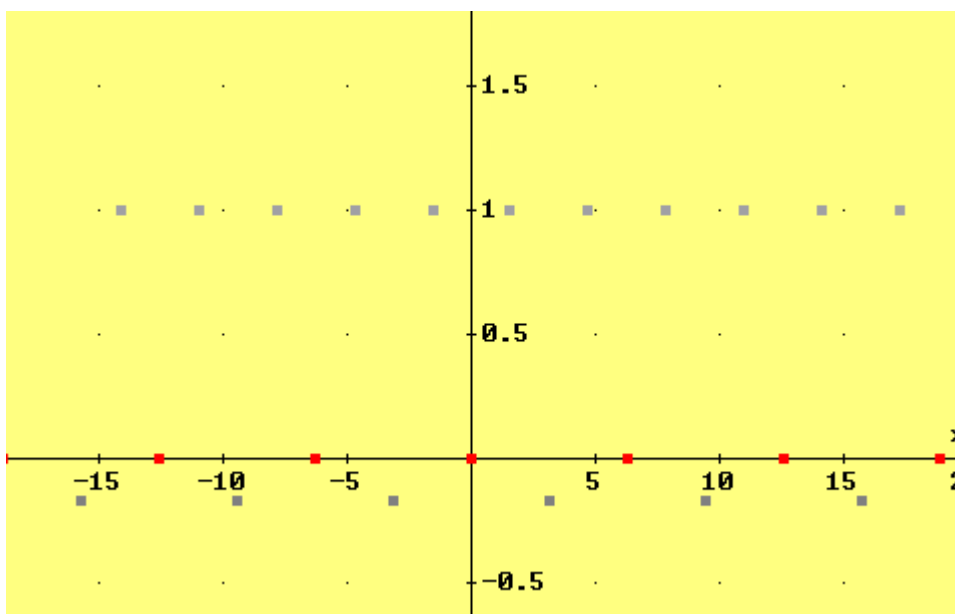
il dominio di  $f(x)$  va ristretto quindi ai soli valori di x per cui l'esponente assume valori interi, pertanto

a)  $x = 2k\pi \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow f(x) = 0^1 = 0$

b)  $x = (2k + 1)\pi \rightarrow \cos x = -1 \rightarrow f(x) = (-6)^{-1} = -\frac{1}{6}$

c)  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \cos x = 0 \rightarrow f(x) = -2^0 = 1$

**GRAFICO**



Con l'esponente  $\sin(x)$  si fa un ragionamento analogo

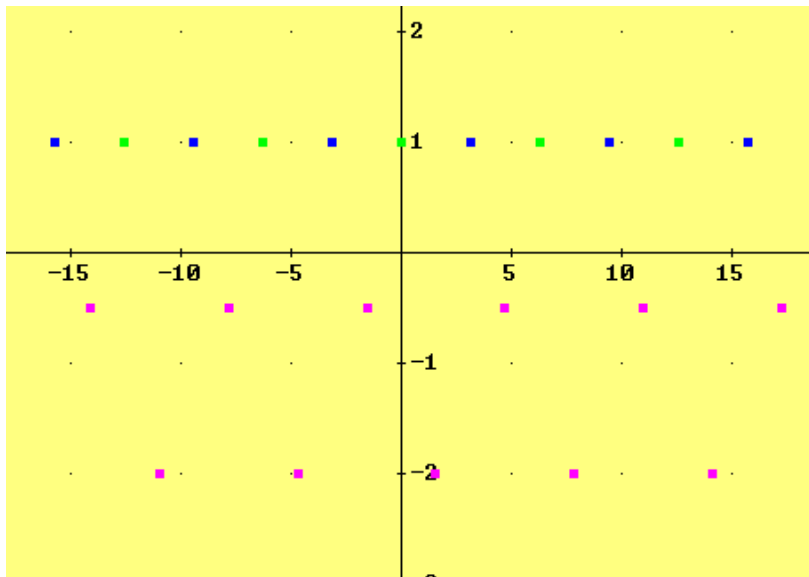
a)  $x = 2k\pi \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow f(x) = 0^0 = \text{forma priva di significato algebrico}$  :  
 clicca qui [per approfondire](#)

b)  $x = (2k + 1)\pi \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow f(x) = (-6)^0 = 1$

c)  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \sin x = 1 \rightarrow f(x) = -2^1 = -2$

d)  $x = \frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi \sin x = -1 \rightarrow f(x) = -2^{-1} = -\frac{1}{2}$

## GRAFICO



Da notare: nel grafico, ottenuto con DERIVE, compaiono anche i punti di ascissa  $2k\pi$ , avendo assegnato il valore 1 all'espressione  $0^0$

5. Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq 1$ .

$$\text{Valor medio} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \rightarrow \int_0^1 e^x(x^2 + x + 1) dx$$

Calcoliamo una primitiva di  $f(x)$  con il metodo di integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int e^x(x^2 + x + 1) dx &= e^x(x^2 + x + 1) - \int e^x(2x + 1) dx \\ &= e^x(x^2 + x + 1) - e^x(2x + 1) + \int 2e^x dx = \\ &e^x(x^2 + x + 1) - e^x(2x + 1) + 2e^x = e^x(x^2 - x + 2) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 e^x(x^2 + x + 1) dx = 2e - 2$$

6. Si determini un numero positivo  $N$  tale che, per  $x > N$ , la funzione  $2^{0.3x}$ , è sempre maggiore della funzione  $x^{30}$ .

Se  $x > 0$ , la disequazione  $2^{0.3x} > x^{30}$  equivale a  $2^{\frac{x}{100}} > x$  ovvero ponendo  $\frac{x}{100} = t$   
 $2^t > 100t$

Assegnando a  $t$  valori interi positivi, il primo membro cresce in progressione geometrica di ragione 2 e primo termine 1, il secondo è una progressione aritmetica di ragione 100 e primo termine 100.

<b>t</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>2<sup>t</sup></b>	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
<b>100 t</b>	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

Dalla tabella si evince che se  $t > 10$  sarà

$$2^t > 100t$$

Nel punto di ascissa  $t=10$  la funzione esponenziale  $y = 2^t$  cresce molto più rapidamente della retta  $y=100t$ , come si può controllare confrontando le rispettive pendenze

$$2^{10} \ln 2 \cong 709 > 100$$

Tenendo conto del fatto che la pendenza della funzione esponenziale cresce a sua volta con andamento esponenziale, mentre la pendenza della retta rimane costante, possiamo affermare che da quel punto in poi la disuguaglianza sarà sempre verificata.

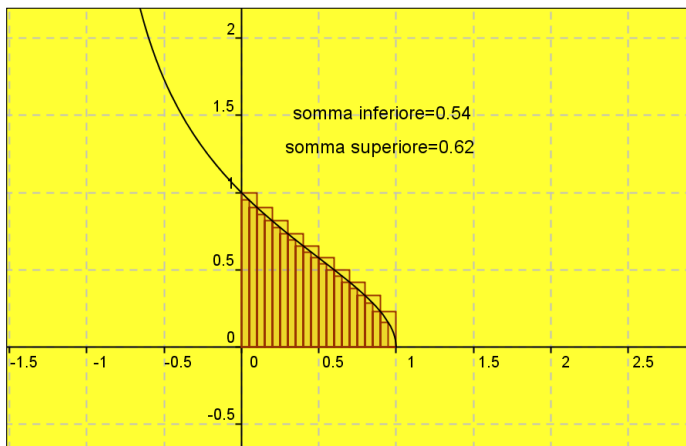
In corrispondenza possiamo affermare che per  $x > 1000$  sarà verificata la disuguaglianza  $2^{0.3x} > x^{30}$

**7. Tenuto conto che:**

$$\frac{\pi}{2} - 1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

**si calcoli un'approssimazione di  $\pi$ , utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.**

Dall'uguaglianza si deduce  $\pi = 2 + 2 \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$



La funzione è sempre decrescente, come si deduce osservando che la derivata prima è sempre negativa.

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$$

Dividiamo l'intervallo  $[0,1]$  in  $n$  parti uguali di ampiezza  $h = \frac{1}{n}$

Gli estremi  $x_i$  e  $x_{i+1}$  dei vari intervalli saranno  $0 \quad h \quad 2h \quad 3h \dots (n-1)h \quad 1$

Costruiamo un algoritmo per calcolare la somma inferiore e la somma superiore con il metodo dei rettangoli

xa	xb	n	h		
0	1	10	0,1		
xi	f(xi)		xi	f(xi)	
0,1	0,904534		0	1	
0,2	0,816497		0,1	0,904534	
0,3	0,733799		0,2	0,816497	
0,4	0,654654		0,3	0,733799	
0,5	0,57735		0,4	0,654654	
0,6	0,5		0,5	0,57735	
0,7	0,420084		0,6	0,5	
0,8	0,333333		0,7	0,420084	
0,9	0,229416		0,8	0,333333	
1	7,45E-09		0,9	0,229416	

SOMMA-inferiore 0,516967

 $\pi$  3,033933

SOMMA-superiore 0,616967

 $\pi$  3,233933**Scegliendo n=100 si trova un'approssimazione migliore**

SOMMA-inferiore 0,565658

 $\pi$  3,131315

SOMMA-superiore 0,575658

 $\pi$  3,151315**8. La regione del I quadrante delimitata dall'ellisse di equazione**

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

e dagli assi cartesiani è la base di un solido F le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse y,

sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di F.

Utilizzando il metodo delle fette

$$V_F = \int_0^1 x^2 dy = \int_0^1 (4 - 4y^2) dy = \frac{8}{3}$$

**9. Un bersaglio è costituito da tre cerchi concentrici, i cui raggi misurano rispettivamente 5, 3 e 1. Un arciere ha probabilità  $\frac{1}{2}$  di colpire il bersaglio. Qual è la probabilità che lo colpisca in un punto appartenente al cerchio di raggio 3 ma non a quello di raggio 1 ?**

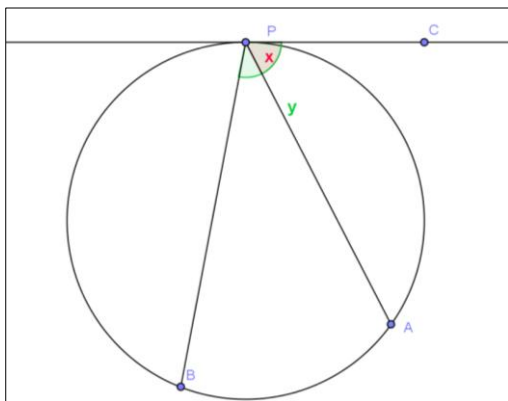
L'area del cerchio di raggio 5 è  $25\pi$ , quella della corona circolare  $S$  compresa fra il cerchio di raggio 3 e quello di raggio 1, è  $8\pi$ , quindi la probabilità che l'arciere, se colpisce il bersaglio, lo colpisca in un punto di  $S$  è uguale a  $\frac{8}{25} = 32\%$

Poiché la probabilità che il bersaglio venga colpito è  $\frac{1}{2}$ , la probabilità richiesta è 16%

**10. Sia  $P$  un punto fissato su una circonferenza; quale è la probabilità che prendendo su questa due punti a caso  $A$  e  $B$ , l'angolo  $\widehat{APB}$  sia acuto? Si illustri il ragionamento seguito.**

Si tratta di una distribuzione uniforme bivariata .

Prendiamo come variabili l'ampiezza  $x$  dell'angolo  $\widehat{APC}$ , dove  $C$  è un punto della semiretta tangente in  $P$  alla circonferenza, e l'ampiezza  $y$  dell'angolo  $\widehat{BPC}$



Le due variabili variano ,con continuità , da 0 a  $\pi$

*l'evento { si scelgono due punti a caso sulla circonferenza} sarà rappresentato da un punto  $(x;y)$  del quadrato di lato  $\pi$*

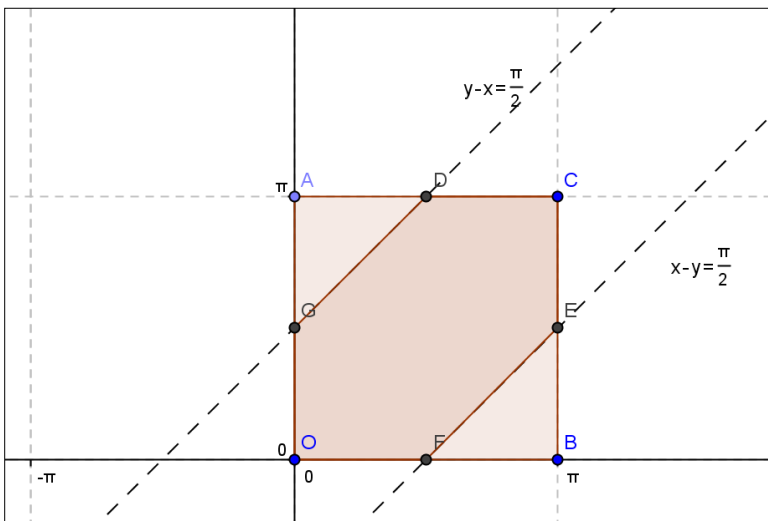
Affinché l'angolo  $\widehat{APB}$  sia acuto ( evento  $E$  ) deve essere soddisfatta la relazione  $|x - y| < \frac{\pi}{2}$  la cui

rappresentazione grafica è data dalla striscia compresa tra le due rette parallele

$$x - y = \frac{\pi}{2} \quad y - x = \frac{\pi}{2}$$

I punti del poligono OFECDG, intersezione tra la striscia e il quadrato, sono i casi favorevoli

all'evento  $E$



$$P(E) = \frac{\text{area poligono}}{\text{area quadrato}} = \frac{\frac{3}{4}\pi^2}{\pi^2} = \frac{3}{4}$$