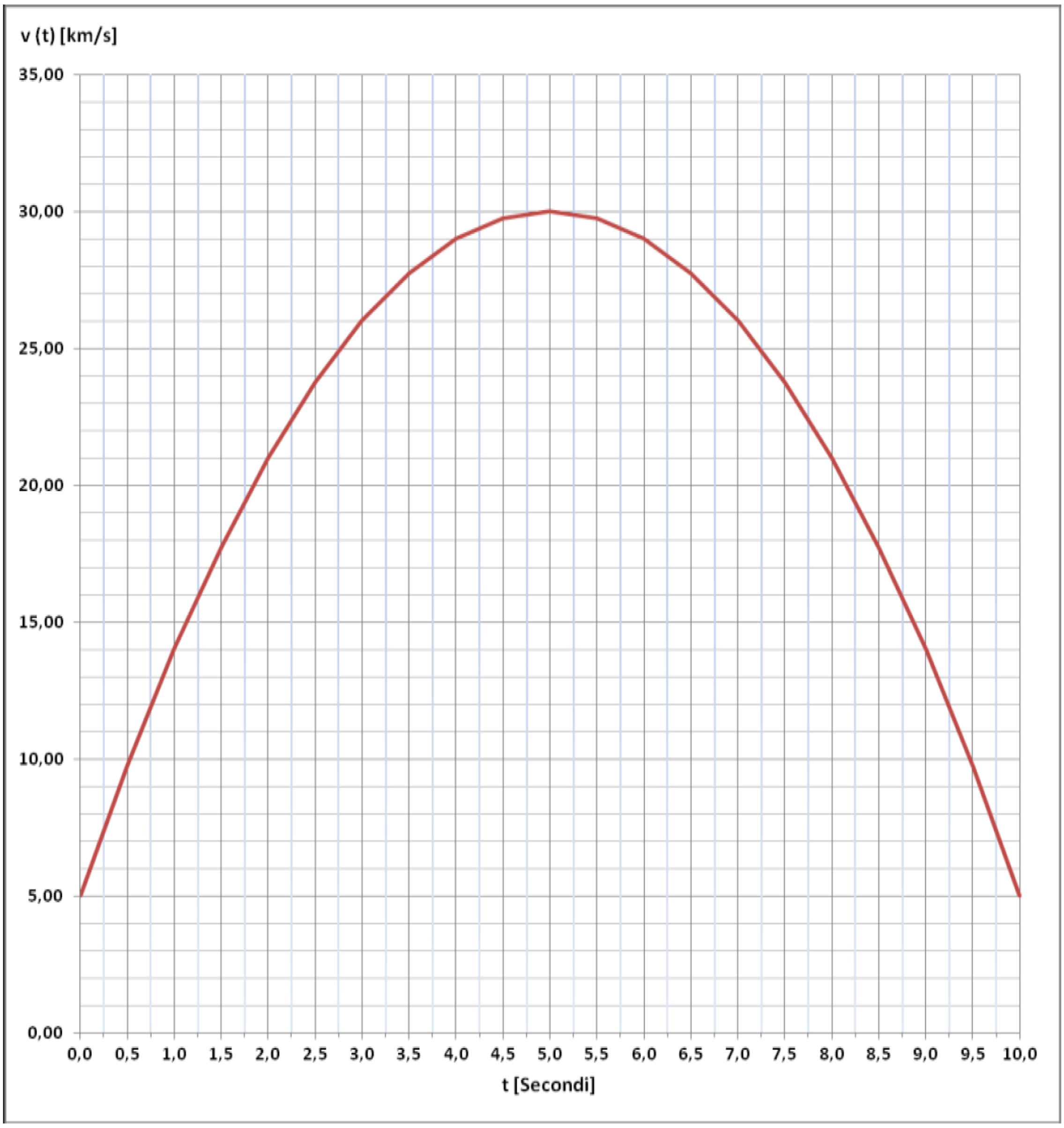
PROBLEMA 1: una collisione tra meteoriti.

Problemi di simulazione della seconda prova di matematica
Esami di stato liceo scientifico 25 febbraio 2015
Lo studente deve svolgere un solo problema a sua scelta
Tempo massimo assegnato alla prove tre ore

Problema 1: **Una collisione tra meteoriti**

Marco e Luca, durante la visita guidata ad un museo scientifico interattivo, osservano su un monitor la simulazione della collisione tra due meteoriti, effettuata da un videogioco. Sul monitor sono rappresentate la traiettoria del primo meteorite e il grafico della sua velocità in funzione del tempo, mostrato in figura.



Soluzione di Adriana Lanza

In base alle loro conoscenze di matematica, discutono sul tipo di curva geometrica rappresentata dal grafico e cercano di determinarne l'equazione, necessaria per procedere nella simulazione.

1. Aiuta Marco e Luca a determinare l'equazione che rappresenta la curva, spiegando il procedimento seguito.

Dopo che Marco e Luca hanno scritto sul terminale l'equazione trovata, il videogioco si complimenta con loro e sul monitor appare la seguente espressione:

$$s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t, \; con \; t \geq 0.$$

Viene quindi chiesto loro di verificare se la funzione data rappresenta lo spazio percorso dal meteorite in funzione del tempo (legge oraria del moto).

2. Aiuta Marco e Luca a verificare che la funzione apparsa sul monitor rappresenta la legge oraria del moto, spiegando il procedimento seguito.

A questo punto sul monitor appare un secondo meteorite, la cui traiettoria interseca quella del primo meteorite in un punto P. Il videogioco chiede quale condizione deve essere verificata affinché avvenga l'urto.

3. Aiuta Marco e Luca a rispondere in modo qualitativo.

Marco e Luca rispondono correttamente e il primo meteorite viene colpito dal secondo e devia dalla traiettoria originaria modificando il suo moto. Dopo l'urto il monitor indica che il primo meteorite si muove ora con la nuova legge oraria:

$$s(t) = 2t^2 + \frac{5}{3}t$$

Il videogioco chiede quindi di determinare il tempo t_{urto} in cui è avvenuto l'urto.

Aiuta Marco e Luca a:

4. determinare il tempo t_{urto};
5. studiare la legge oraria del primo meteorite nell'intervallo tra 0 e $3 \cdot t_{urto}$ secondi, evidenziando la presenza di eventuali punti di discontinuità e/o di non derivabilità e tracciandone il grafico.

SOLUZIONE

Introduzione su alcuni concetti fondamentali di cinematica

Prima di passare allo svolgimento risolutivo è opportuno puntualizzare alcuni concetti relativi allo studio cinematico del moto di un punto materiale, necessari per ben comprendere il significato di alcune richieste della traccia.

Per semplicità ci limitiamo al caso del moto in una o due dimensioni.

La traiettoria

Si consideri un corpo P, supposto puntiforme (punto materiale), che si sposta in un piano rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane, Oxy secondo la curva rappresentata in Fig.1 (traiettoria).

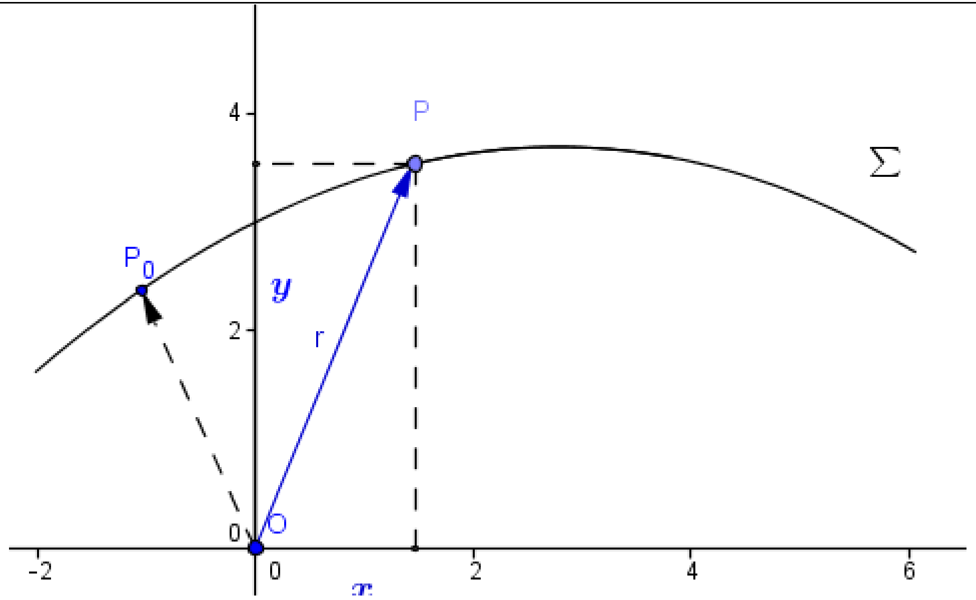


Fig.1

Al variare del tempo t la posizione del punto P è individuata da un vettore $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}(x; y)$ le cui componenti sono funzioni del tempo t .

Le equazioni (dette anche equazioni orarie)

$$\begin{cases} x = & x(t) \\ y = & y(t) \end{cases}$$

possono essere interpretate come equazioni parametriche di una curva piana Σ la cui equazione cartesiana f(x,y)=0 può essere determinata eliminando la variabile t.

La curva Σ è il luogo geometrico delle posizioni occupate dal punto P durante il suo moto e prende il nome di ***traiettoria.***

L'istante t=0 è detto istante iniziale, in quanto è l'istante in cui si inizia a studiare il moto . La posizione $\boldsymbol{P_0}$ che corrisponde a t=0 è la ***posizione iniziale***

Il moto su una traiettoria prestabilita

Un altro approccio allo studio del moto si basa sulla rappresentazione intrinseca della traiettoria.

Supponiamo che un punto materiale P si muova su una traiettoria prestabilita o comunque di per sè nota, Σ , su cui è stato scelto un verso di percorrenza positivo (indicato dalla freccia nella fig.2)

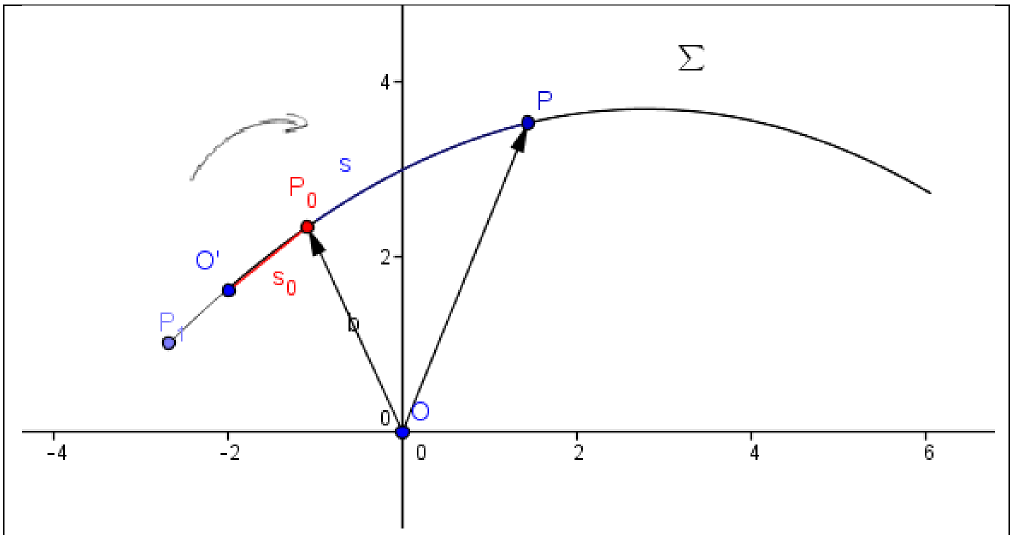


Fig.2

Per determinare la posizione di P all'istante t non è necessario ,in questo caso, ricorrere al vettore $\overrightarrow{OP}$ ma è sufficiente conoscere la distanza s (distanza orientata o ***ascissa curvilinea****) misurata lungo la traiettoria, del punto P da un punto O' prefissato.*

L'ascissa curvilinea corrisponde alla lunghezza dell'arco O'P di Σ, presa con il segno positivo se P segue O' secondo il verso di percorrenza, negativa in caso contrario . Se $P \equiv O' \ \rightarrow s = 0$

In questo caso,quindi, il moto è unidimensionale in quanto può essere descritto mediante l'unica variabile spaziale s che , essendo funzione del tempo t , si indica con s(t).

Il valore di s che corrisponde all'istante t=0 , indicato con $\boldsymbol{s_o}$, *è la* ***posizione iniziale****. In fig.1 corrisponde alla posizione P_0.*

Se $P_0 \equiv O'$ allora $s_o = 0$

L'equazione $\boldsymbol{s = s(t)}$, che permette di determinare la posizione di P all'istante t è la ***legge oraria del moto.***

Soluzione di Adriana Lanza

*Il grafico di s(t) in un riferimento cartesiano di coordinate (s;t) è **il diagramma orario,** detto anche **grafico spazio- tempo** dove per spazio si intende **la misura (orientata) dell'arco O'P .***

La velocità

Se P_1 e P_2 sono due posizioni di P, corrispondenti agli istanti t e $t+\Delta t$, indichiamo con Δs la variazione di posizione $s(t+\Delta t)-s(t)$

*Il limite $lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$, se esiste ed è finito, è la **velocità istantanea** e rappresenta la pendenza del grafico spazio tempo , all'istante t.*

Per la definizione di derivata di una funzione, possiamo dire che la velocità del punto P all'istante t è uguale alla derivata della funzione s(t)

Relazione tra la funzione velocità e la legge oraria

La velocità è funzione del tempo e sussiste la relazione

$$v(t) = s'(t)$$

pertanto la legge oraria s(t) è una delle infinite primitive di v(t) e può essere determinata imponendo la condizione

$$s(0) = s_0$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale e per il teorema di Torricelli-Barrow, valgono le relazioni

$$\boldsymbol{\Delta s = s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(\tau)d\tau}$$

$$\boldsymbol{s(t) - s(0) = \int_0^t v(\tau)d\tau \rightarrow s(t) = s_0 + \int_0^t v(\tau)d\tau}$$

Se v(t) è positiva o nulla nell'intervallo $[\boldsymbol{t_1; t_2}]$ l' integrale $\boldsymbol{\int_{t_1}^{t_2} v(\tau)d\tau}$ rappresenta anche l'area sottesa dal grafico di v(t) sull'intervallo$[\boldsymbol{t_1; t_2}]$

La relazione $\boldsymbol{\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(\tau)d\tau}$ può essere interpretata come un significato fisico (cinematico) dell'integrale definito e si applica quando, nota la velocità ,si vuole calcolare lo spazio percorso in un certo intervallo di tempo.

Svolgimento

Sul monitor sono rappresentate la traiettoria del meteorite e ll grafico della sua velocità in funzione del tempo

Aiuta Marco e Luca a determinare l'equazione che rappresenta la curva, spiegando il procedimento seguito.

Marco e Luca devono innanzi tutto osservare il grafico velocità/tempo che appare sul monitor e prenderne in considerazioni le proprietà più significative :

- Il grafico velocità-tempo è un arco di curva i cui estremi hanno coordinate $(0;5)$ e $(10;5)$,rispettivamente .
- La curva non è monotona e incontra le rette di equazione y =k(con $5 \leq k < 30$) in due punti distinti e simmetrici rispetto alla retta di equazione $x = 5$
  Se k= 30 le intersezioni sono coincidenti.
- La curva è convessa
- Nell'intervallo $[0;10]$ ammette il punto $(5;30)$ come punto di massimo

Non è precisato ma è lecito supporre che l'intervallo di tempo $0 \leq t \leq 10$

corrisponda al tempo in cui il primo meteorite percorre la traiettoria precedentemente evidenziata sul monitor.

Non essendo stata fornita alcuna informazione sulla natura della curva, Marco e Luca possono solo avanzare alcune congetture sull'equazione da associare al grafico visualizzato sul monitor.

Il modello più semplice , tra quelli che si adattano alla curva , è una funzione polinomiale di grado 2, ovvero l'equazione di una parabola con asse verticale, la cui espressione analitica è del tipo

$$v = at^2 + bt + c$$

- Da quanto osservato precedentemente , l'asse della parabola deve coincidere con la retta $x = 5$ e il vertice con il punto$(5;30)$

Calcolo del valore dei coefficienti a,b,c

Per determinare i tre coefficienti a,b,c è sufficiente imporre il passaggio per tre punti, ad esempio i tre punti di coordinate $(0;5)$, $(10;5)$,$(5;30)$, già considerati in precedenza , e risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} 30 = & 25a + 5b + c \\ 5 = & c \\ 5 = & 100a + 10b + c \end{cases}$$

Si perviene più agevolmente agli stessi i risultati scrivendo l'equazione della parabola nella forma

$$v - 30 = a(t-5)^2$$

che sfrutta la conoscenza del vertice, di coordinate (5:30).

Imponendo il passaggio per il punto di coordinate $(0;5) \rightarrow 5 - 30 = 25a \rightarrow$ $-25 = 25a \rightarrow a = -1$

da cui

$$v = -(t-5)^2 + 30 = -t^2 + 10t + 5$$

L'equazione della curva velocità-tempo è

$$\boldsymbol{v = -t^2 + 10t + 5}$$

1. **Il videogioco si complimenta con Marco e Luca per la risposta esatta e chiede di verificare se l'equazione**

$$\mathbf{s = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t \ \ con\ t \geq 0}$$

rappresenta lo spazio percorso (legge oraria del moto).

Osservazione

Per rispondere alle richieste del testo dobbiamo accettare alcune informazioni implicite:

- *per spazio percorso si intende lo spazio percorso dal meteorite sulla sua traiettoria nell'intervallo* $[0;t]$
- *lo spazio percorso coincide con la legge oraria*

Lo spazio percorso, Δs, nell'intervallo $[0;t]$ è $\boldsymbol{\Delta s = \int_0^t v(\tau) d\tau}$,

uguale all'area della regione di piano sottesa dal grafico di v(t) sull'intervallo $[0;t]$ (Fig.3)

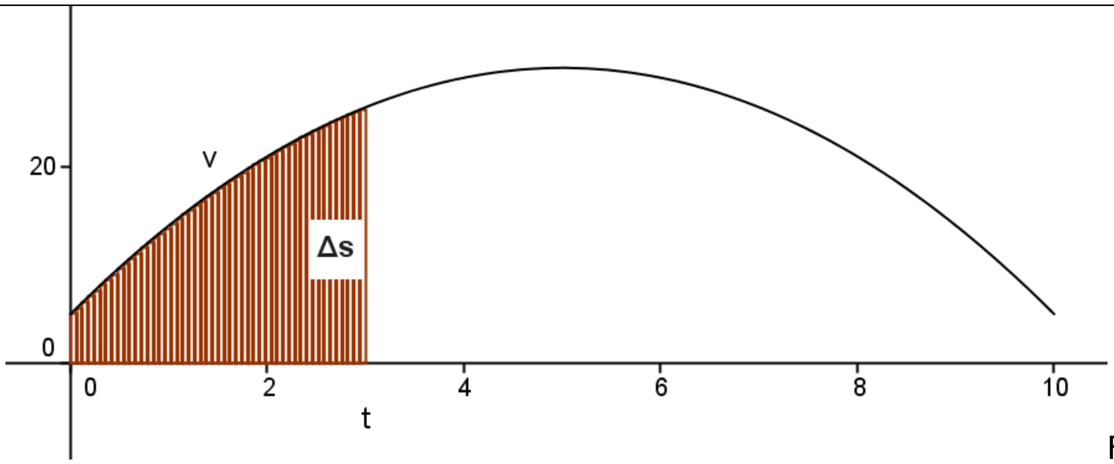


Fig.3

Poiché

$\Delta s = \int_0^t v(\tau)d\tau = \int_0^t(-\tau^2 + 10\tau + 5)\mathrm{dt} = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t \ - 0 = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t$

è verificato che l'equazione assegnata rappresenta lo spazio percorso dal meteorite, sulla sua traiettoria, nell'intervallo $[0; \mathrm{t}]$

La legge oraria, come osservato nell'introduzione, dipende dalla posizione iniziale s_0, ovvero dalla scelta dell'origine O' rispetto alla quale è misurata la distanza s del punto che si muove.

La traccia non fornisce alcuna informazione sulle condizioni iniziali, ma identifica la legge oraria con lo spazio percorso.

Essendo

$$s(t) - s(0) = \int_0^t v(\tau)d\tau \rightarrow s(t) = s_0 + \int_0^t v(\tau)d\tau$$

si deve <u>supporre</u> che s_0=0, cioè che all'istante t=0 il meteorite si trovi nel punto O' scelto come origine , rispetto a cui è misurata la sua posizione sulla traiettoria e concludere che la funzione assegnata rappresenta anche la legge oraria.

Si può anche procedere nel modo seguente:

a) Verificare che la funzione assegnata è una primitiva della funzione v(t) , determinata al punto1 , cioè che

$$s'(t) = v(t)$$

Essendo

$$\boldsymbol{s'(t) = -\frac{3}{3}t^2 + 10t + 5 = -t^2 + 10t + 5}$$

poiché le primitive di una stessa funzione differiscono solo per una costante, possiamo affermare che

$$\boldsymbol{s(t)} = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t + \mathrm{k}$$

dove k è una costante da determinare conoscendo la condizione iniziale $s(0) = s_0 \rightarrow$

$$s(0) = 0 + k = s_0 \rightarrow k = s_0$$

Quindi

$$\boldsymbol{s(t)} = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t + s_0$$

b) Lo spazio percorso dal meteorite , sulla sua traiettoria, nell'intervallo $[0; t]$ è uguale alla *misura(orientata) dell'arco di traiettoria he ha per estremi la posizione iniziale* P_o *e la posizione finale (all'istante t) , mentre*
la variabile s(t) che compare nella legge oraria è la misura(orientata) dell'arco di traiettoria he ha per estremi il punto O' scelto come origine sulla e la posizione finale (all'istante t)

I due valori ovviamente coincidono se $P_o \equiv O'$, q cioè se

$$s_o = 0$$

Si può concludere pertanto che

$$\boldsymbol{s(t)} = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t$$

A questo punto sul monitor appare un secondo meteorite, la cui traiettoria interseca quella del primo meteorite in un punto P. Il videogioco chiede quale condizione deve essere verificata affinché avvenga l'urto.

2. Aiuta Marco e Luca a rispondere in modo qualitativo

Le due traiettorie , visualizzate sul monitor, sono due curve complanari e si intersecano in un punto P.

I due meteoriti collidono se si trovano contemporaneamente nel punto P.

Fissato , nel piano al quale appartengono le due traiettorie, un riferimento cartesiano Oxy, ad esse corrispondano le rispettive equazioni $f_1(x;y)=0\ e\ f_2(x,y)=0$ che

sono entrambe soddisfatte dalle coordinate del punto P che indicheremo con $(x_u\,;y_u)$

Se consideriamo anche le equazioni parametriche , in funzione del parametro t (tempo)

$$\begin{cases} x_1 = & x_1(t) \\ y_1 = & y_1(t) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x_2 = & x_2(t) \\ y_2 = & y_2(t) \end{cases}$$

indicando con t_u l'istante in cui avviene l'urto esse devono essere soddisfatte dalla stessa terna $(x_u; y_u;\ t._u\,)$

***4.* Il primo meteorite viene colpito dal secondo e devia dalla traiettoria originaria modificando il suo moto**.

Dopo l'urto il monitor indica che il primo meteorite si muove ora con la nuova legge oraria: $s(t)=2t^2+\frac{5}{3}t$
Il videogioco chiede quindi di determinare il tempo t_{urto} in cui è avvenuto l'urto.

Poichè, per definizione di urto, la durata della collisione è trascurabile per tempo t_{urto} si intende l'istante in cui i due meteoriti si incontrano.

Poiché si **suppone** che l'istante t =0 coincida con l'inizio della simulazione , mentre l'urto è avvenuto a simulazione avviata, dovrà essere $\mathbf{t_{urto}>0}$

Dopo l'urto il primo meteorite si muove su una nuova traiettoria e con una diversa velocità.

E' lecito supporre che le due traiettorie si raccordino nel punto in cui avviene l'urto e che le ascisse curvilnee sul primo e sul secondo ramo di curva possano essere riferite alla stessa origine O', quella inizialmente scelta sulla prima traiettoria.

La posizione del primo meteorite , nell'istante $t_{urto,}$ deve essere allora la stessa sia se viene calcolata tramite la prima legge oraria, sia tramite la seconda, pertanto si può imporre la condizione

$$-\frac{1}{3}t^3+5t^2+5t=\ 2t^2+\frac{5}{3}t \rightarrow -t^3+9t^2+10t=\ 0 \rightarrow t(-t^2+9t+10)=0$$

L'equazione ammette una soluzione t=0 , le altre due sono le radici dell'equazione $t^2-9t-10=0$

Poichè la somma delle radici deve essere uguale a 9 e il prodotto deve essere uguale a -10. Le due radici sono -1 e 10.

Si accetta la soluzione t_{urto} = 10s

5. studiare la legge oraria del primo meteorite nell'intervallo tra 0 e 3·t_{urto} secondi, evidenziando la presenza di eventuali punti di discontinuità e/o di non derivabilità e tracciandone il grafico.

Espressione analitica di s(t)

La legge oraria del primo meteorite nell'intervallo $[0;30]$, è una funzione definita a tratti

$$s(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t & 0 \le t \le 10 \\ 2t^2 + \frac{5}{3}t & 10 < t \le 30 \end{cases}$$

Continuità e derivabilità

s(t) è unione di due funzioni polinomiali, quindi continue e derivabili,

pertanto sicuramente continua e derivabile per $0 \le t < 10 \quad \cup \quad 10 < t \le 30$

Già è stato imposto che la legge oraria del meteorite passi con <<continuità>> dalla prima alla seconda espressione, comunque si verifica facilmente che s(t) è continua per t=10

Infatti

$$s(10) = \lim_{t\to 10^-}\left(-\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t\right) = \lim_{t\to 10^+}\left(2t^2 + \frac{5}{3}t\right) = \frac{650}{3}$$

Un eventuale punto di discontinuità e/o di non derivabilità può essere il punto di ascissa 10.

Per verificare se s(t) derivabile per t=10, determiniamo prima la derivata per $t \ne 10$

$$s'(t) = \begin{cases} -t^2 + 10t + 5 & 0 \le t < 10 \\ 4t + \frac{5}{3} & 10 < t \le 30 \end{cases}$$

Calcoliamo poi

$\lim_{t\to 10^-}(-t^2+10t+5)$ =5   derivata sinistra

$\lim_{t\to 10^-}\left(4t+\frac{5}{3}\right)$ =$\frac{125}{3}$ derivata destra

Poiché la derivata destra è diversa dalla derivata sinistra, la funzione s(t) non è derivabile nel punto di ascissa 10

Il punto $\left(10;\frac{650}{3}\right)$ è un punto angoloso.

Studio della funzione

$$\boldsymbol{s_1(t)}=\begin{cases}-\frac{1}{3}t^3+5t^2+5t\\ 0\le t\le 10\end{cases}$$

L'andamento della derivata $-t^2+10t+5$ con $0\le t\le 10$ può essere dedotto dal grafico della funzione v(t) il cui grafico è stato analizzato nel punto 1:

- è sempre positiva
- crescente per $0\le t<5$
- decrescente per $5<t<\le \mathbf{10}$

La funzione $\boldsymbol{s_1(t)}$ pertanto

- È monotona crescente
- Si annulla per t=0 e , essendo monotona crescente,non può ammettere altri zeri ed è sempre positiva
- Volge la concavità verso l'alto per $0\le t<5$ e verso il basso per $5<t<\le 10$

Il punto $\left(5;\frac{325}{3}\right)$ è un flesso

Studio della funzione

$$\boldsymbol{s_2(t)}=\begin{cases}2t^2+\frac{5}{3}t\\ 10<t\le 30\end{cases}$$

Si tratta di un ramo di parabola che ha asse parallelo all'asse delle ordinate, volge la concavità verso l'alto e il cui i vertice ,di coordinate

$$\begin{cases} t_v = -\dfrac{\frac{5}{3}}{4} = & -\dfrac{5}{12} \\ s_2(t_v) = -\dfrac{\frac{25}{9}}{8} = & -\dfrac{25}{72} \end{cases}$$

appartiene al quarto quadrante.

Nell'intervallo $10 < t \leq 30$ il ramo di parabola ha per estremi i punti di rispettive coordinate

$$\left(10; \frac{650}{3}\right) \quad e \quad (30; 1850)$$

ed è sempre crescente.

Il grafico di s(t) nell'intervallo $[0; 30]$ è rappresentato in Fig.4

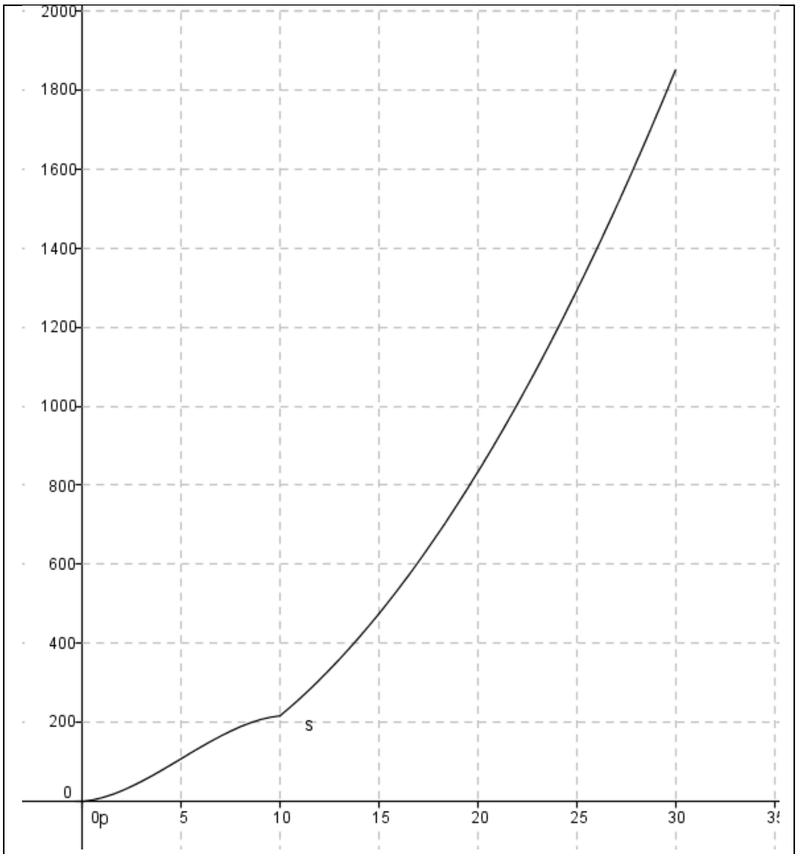


Fig.4