4)Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo [0, 2] viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?
Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 4/3?
Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

Soluzione

Considerazioni preliminari

1) La funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria continua X deve godere delle seguenti proprietà :

a) è definita in R e assume valori in R
b) non è mai negativa
c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

che andiamo a verificare dopo aver scritto la funzione nella forma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 & per \quad x \in [0;2] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

La proprietà **a)** è palesemente verificata

Per verificare la **b)** studiamo il segno di $\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 = \frac{3}{4}x^2(2-x)$ nell'intervallo $[0;2]$

Il polinomio si annulla agli estremi ed è positivo all'interno dell'intervallo

Al di fuori dell'intervallo stesso risulta $f(x) = 0$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^2 (\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3)\, dx = \left[\frac{x^3}{2} - \frac{3}{16}x^4\right]_0^2 = 4 - 3 = 1$

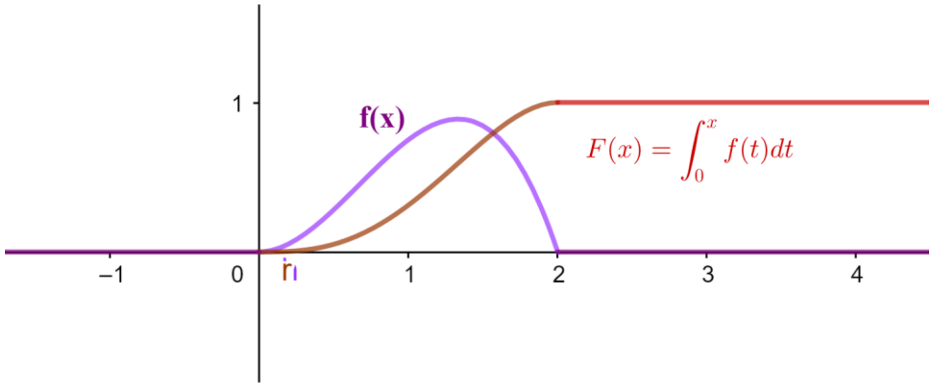
2) Nel caso continuo la probabilità che X assuma un valore specifico uguale a x è nulla ($P(X = x) = 0$ per ogni x reale) mentre la probabilità che assuma valori compresi in un intervallo $[a;b]$ è

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

3) La funzione integrale $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ rappresenta la probabilità che la variabile aleatoria assuma valori minori o uguali a x ed è la funzione di distribuzione cumulata o funzione di ripartizione $F(x) = P(x \le x)$. E' una funzione continua non decrescente

nel nostro caso $F(x) = \begin{cases} 0 & per \quad x \leq 0 \\ \frac{x^3}{2} - \frac{3}{16}x^4 & per \quad 0 < x < 2 \\ 1 & per \ x \geq 2 \end{cases}$

4) Grafico



5) Il valor medio o valore atteso della variabile aleatoria è $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

Risposte

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4\right) dx = \left[\frac{3}{8}x^4 - \frac{3}{20}x^5\right]_0^2 = 6 - \frac{24}{5} = \frac{6}{5}$$

Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 4/3?

$$P\left(X = \frac{4}{3}\right) = 0$$

Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

$$P(X < 1) = F(1) = \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16} \approx 31\%$$