Una variabile casuale, a valori nell'intervallo [0, 10], è distribuita secondo la densità di probabilità data dalla funzione

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x^2, & per\ \ 0\le x\le 1\\ \frac{1}{12}. & per\ 1<x\le 10\end{cases}}$$

Stabilire il valore medio e il valore mediano di questa variabile casuale.

Soluzione

Considerazioni preliminari

1) Verifichiamo se la funzione assegnata gode delle proprietà che caratterizzano la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua X:

a) è definita in R e assume valori in R
b) non è mai negativa
c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Supponendo che la distribuzione si estenda da $-\infty$ $a+\infty$, con valore uguale a 0 al di fuori degli intervalli già considerati, la proprietà **a)** è verificata.

Per verificare la **b)** osserviamo che la funzione $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x^2$ si annulla per $x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$, assume valori positivi nell'intervallo $[0;1]$.

per la c) calcoliamo

$$\int_0^{10} f(x)dx = \int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x^2\right)dx+\int_1^{10}\frac{1}{12}dx = \left[\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}x^3\right]_0^1+\frac{9}{12}=\frac{3}{12}+\frac{9}{12}=1$$

Valor medio

Il valor medio o valore atteso della variabile aleatoria è $E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=$

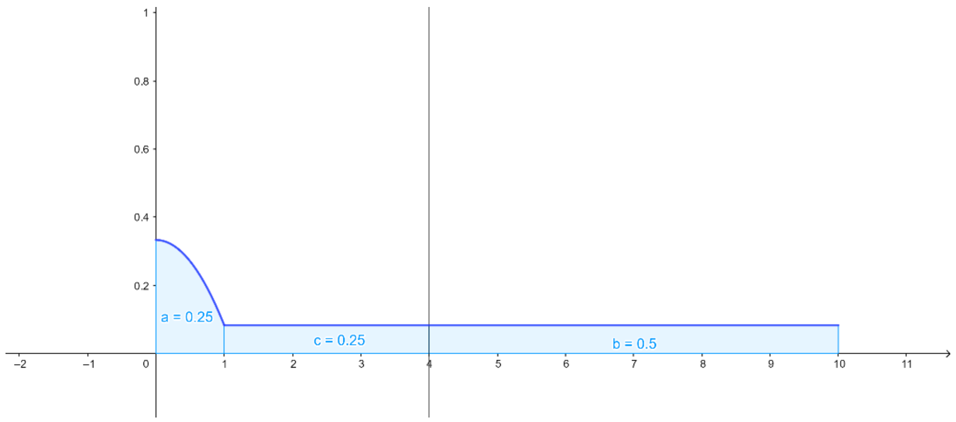
$$\int_0^1\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x^3\right)dx+\int_1^{10}\frac{1}{12}x\,dx=\left[\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{16}x^4\right]_0^1+\left[\frac{1}{24}x^2\right]_1^{10}=\frac{1}{6}-\frac{1}{16}+\frac{100}{24}-\frac{1}{24}=\frac{203}{48}\approx 4{,}23$$

Valore mediano

Il valore mediano o mediana della distribuzione, è quel valore M tale che

$P(X<M)=P(X\ge M)=\frac{1}{2}$.

Graficamente, la retta di equazione x=M divide la regione di piano sottesa dal grafico di f(x) in due parti ciascuna di area uguale a $\frac{1}{2}$..



Essendo uguale a $\frac{1}{4}$ l'area sottesa dal grafico dell'arco di parabola, nell'intervallo $[0; 1]$, il valore mediano cadrà nell'intervallo $]1; 10]$.
Basta pertanto imporre $\frac{1}{12}(10 - M) = \frac{1}{2}$ per trovare il valore di $M = 4$