7. Come si definisce $n!$ (*n fattoriale*) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?

Risposte commentate

Definizione

Dato un numero naturale $n \neq 0$, si definisce fattoriale di n , indicato con $n!$, il prodotto dei primi n numeri naturali non nulli

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Per definizione si pone $0! = 1$

Sussiste la relazione ricorsiva $n! = n \cdot (n-1)!$

Significato combinatorio

Si verifica facilmente che la formula del fattoriale di n è un caso particolare di quella delle disposizioni semplici di classe k di n oggetti

$$D_{n,k} = n(n-1)\ldots\ldots\ldots(n-k+3)\,(n-k+2)(n-k+1)$$

Se n=k si ottiene infatti

$$D_{n,n} = n(n-1)\ldots\ldots\ldots(3)\,(2)(1)$$

Si parla in questo caso di permutazioni semplici (o anagrammi)

Se in una stringa di lunghezza n compaiono $h, k\ldots\ldots$ elementi uguali si parla di permutazioni con elementi ripetuti .

In questo caso il numero dei possibili anagrammi è $\frac{n!}{h!k!..}$

Esempi

Gli anagrammi della parola SOR sono 3!=6

SOR SRO ROS RSO OSR ORS

Gli anagrammi della parola SOS sono $\frac{3!}{2!}$= 3

SOS SSO OSS

Legame coi coefficienti binomiali

Le Combinazioni di classe k (dove k va 0 ad n) di n elementi , indicate con $C_{n,k}$ *o* $\binom{n}{k}$

corrispondono ai coefficienti dei monomi che compaiono nello sviluppo di (a+b) ^{n,} *dopo che si siano sommati tra di loro i termini simili ; per questo vengono chiamate anche coefficienti binomiali*

Si scrive pertanto

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}\, a^{n-k} b^k$$

Giustificazione della formula :

ciascun monomio dello sviluppo della potenza del binomio, si ottiene scegliendo , in ciascuno degli n fattori di tipo (a+b) , la lettera **a** o la lettera **b.**

Si costruisce quindi una sequenza del tipo $aababbba \dots \dots . aabb$.

Se le a sono in numero di n-k e le b in numero di k, si scriverà $a^{n-k}b^k$

Si otterranno tanti monomi avente parte letterale $a^{n-k}b^k$ quante sono le sequenze in cui un determinato simbolo (la lettera b) compare esattamente k volte (e la lettera a n-k volte),

cioè

i monomi avente parte letterale $a^{n-k}b^k$ sono tanti quanti i modi in cui si possono scegliere k posti ,tra gli n disponibili , da assegnare sempre al simbolo scelto (l'ordine non è significativo), lasciandone $\mathrm{n}-\mathrm{k}$ all'altro , quindi $C_{n,k}$

oppure

il numero dei suddetti monomi simili è uguale a quello dei possibili anagrammi della stringa formata da $n-k$ elementi uguali ad a e k elementi uguali a b

quindi

$$\frac{n!}{k'(n-k)!} = \frac{n(n-1) \dots .(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-k+1)}{k!} = C_{n,k}$$

Conclusione : *il generico monomio assume la forma*

$$C_{n,k}\, a^{n-k}b^k$$