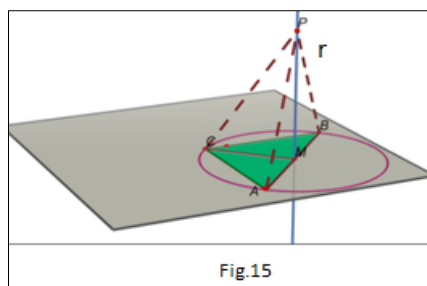


QUESITI ESAME DI Stato dal 2011 al 2014

Soluzioni di Adriana Lanza

Q9 2011 [ORD e PNI-COM] Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.



SOLUZIONE

Sia ABC un triangolo rettangolo in C e sia M il punto medio dell'ipotenusa AB (fig. 15).

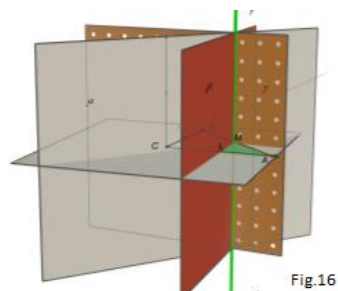
La retta r è perpendicolare in M al piano π su cui giace ABC.

Metodo sintetico

Per dimostrare che r è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici dobbiamo mostrare che:

a) ogni punto P di r è equidistante da A,B e C

Essendo $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$, i triangoli rettangoli PMC, PMB e PMA , aventi in comune il cateto PM , sono tra loro congruenti; pertanto risulta $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$



b) ogni punto P equidistante da A,B e C appartiene ad r

Se P è un punto tale che $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$, i triangoli PMC, PMB e PMA sono tra loro congruenti. Essendo il triangolo PAB isoscele, PM è perpendicolare ad AB e quindi i triangoli PMB e PMA sono rettangoli; di conseguenza sarà rettangolo anche il triangolo PMC .

La retta PM , essendo perpendicolare a due rette del piano di ABC , è perpendicolare in M al piano stesso e quindi coincide necessariamente con r .

Metodo analitico

Introdotta un riferimento cartesiano Oxy avente l'origine nel vertice C , l'asse x coincidente con la retta CA , l'asse y coincidente con la retta CB , l'asse z coincidente con la retta perpendicolare a π nel punto C , sarà:

$$C(0,0,0), \quad A(a,0,0), \quad B(0,b,0), \quad M\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$$

Indichiamo con $P(x,y,z)$ un generico punto dello spazio e imponiamo che $\overline{PC} = \overline{PA} = \overline{PB}$

ovvero

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y - b)^2 + z^2 \end{cases}$$

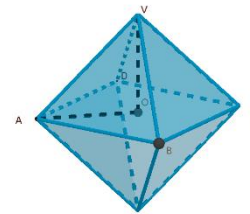
Dopo opportune semplificazioni si ottiene il sistema $\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases}$ che identifica proprio la retta r , quale intersezione del piano β , perpendicolare al

lato CA nel suo punto medio L , e del piano γ , perpendicolare al lato CB nel suo punto medio N . Entrambi i piani passano per M e sono perpendicolari al piano xy (Fig. 16).

Q7. suppletiva-ord.2011

Si domanda quale rapporto bisogna stabilire tra lo spigolo dell'ottaedro regolare e lo spigolo del cubo affinché i due solidi abbiano volumi uguali. 8. Si dimostri che la seguente proposizione è vera:

$$\overline{VO} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{2}} = \frac{l}{\sqrt{2}}$$
$$V_{\text{ottaedro}} = l^3 \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} l^3$$



Soluzione

$$V_{\text{cubo}} = l_{\text{cubo}}^3$$
$$V_{\text{ottaedro}} = \frac{\sqrt{2}}{3} l_{\text{ottaedro}}^3$$

$$V_{\text{cubo}} = V_{\text{ottaedro}} \rightarrow \frac{l_{\text{ottaedro}}}{l_{\text{cubo}}} = \sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt{2}}} \approx 1,28$$

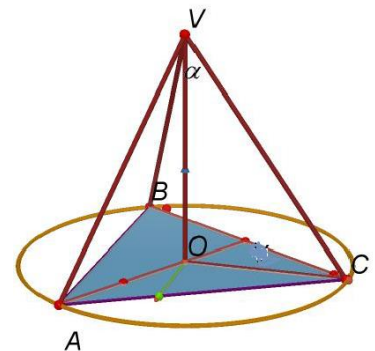
Quesito 7- PNI 2012

E' dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h . Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h .

Soluzione

Nel triangolo rettangolo VOC

$$\overline{VO} = h \quad \overline{VC} = l \quad \overline{OC} = \frac{2l}{3} \sqrt{3} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha \approx 35^\circ$$



2013 Quesito 2 Suppl. ORD-PNI

Quali sono i poliedri regolari? Perché sono detti anche *solidi platonici*?

Commento

Il quesito è analogo a quello proposto nel [2006\[ORD e PNI\]](#)

I poliedri regolari – noti anche come solidi platonici – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

con una differenza tutt'altro che lieve nella formulazione.

Nel quesito del 2006, infatti, la citazione <<solidi platonici>> è del tutto marginale, mentre nel quesito del 2013 è parte integrante della richiesta.

Lo studente può scegliere diversi significati dell'attributo <<platonico>> in base alle sue conoscenze e al suo bagaglio culturale.

Può osservare che i poliedri regolari sono alla base del modello

geometrica, quale metafora dell'ordine dell'universo, abbia influenzato il pensiero occidentale.

Si può citare semplicemente il noto brano del "Timeo" in cui il tetraedro, l'ottaedro, il cubo e l'icosaedro sono associati ai quattro elementi fondamentali, mentre il dodecaedro rappresenta la quinta essenza che tutto avvolge e comprende.

Si può altresì fare un collegamento con il trattato "De quinque corporibus regularibus" di Piero della Francesca (la perfezione delle forme geometriche nella rappresentazione artistica della realtà) o con il "Mysterium cosmographicum" di Keplero: "In questo piccolo libro, caro lettore, mi sono proposto di dimostrare che il Creatore Ottimo Massimo, nella creazione di questo nostro mondo mobile e nella disposizione dei cieli, ha guardato a quei cinque corpi regolari che hanno goduto di così gran fama dai tempi di Pitagora e Platone sino ai nostri giorni, e che alla loro natura ha uniformato il numero e la proporzione dei cieli, e i rapporti dei moti celesti".

Tratta lo stesso argomento il [Quesito 2 2014](#) e il [quesito 6 Europa 2014](#)