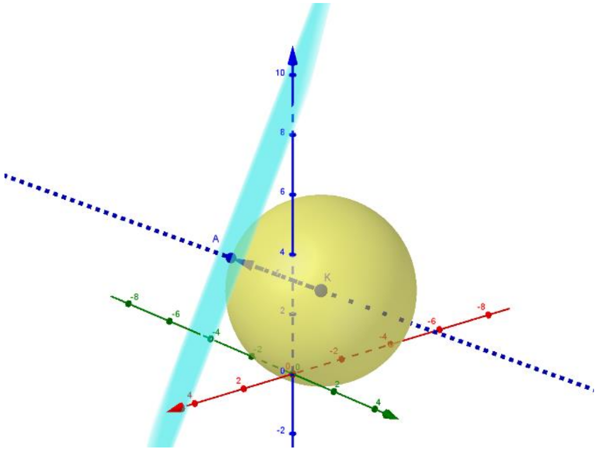
Quesito 5

Una sfera, il cui centro è il punto $\boldsymbol{K(-2;-1;2)}$, è tangente al piano $\boldsymbol{\pi}$ avente equazione $\boldsymbol{2x-2y+z-9=0}$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

Soluzione

Il punto $A(x;y;z)$ di tangenza è il piede della perpendicolare condotta dal punto $K(-2;-1;2)$ al piano π di equazione $2x-2y+z-9=0$.

Il vettore $\vec{r}=\overrightarrow{KA}$,pertanto, è parallelo al vettore $\vec{u}$ determinato dalle componenti $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, corrispondenti ai coefficienti delle incognite nell'equazione del piano stesso



Determiniamo le coordinate di A imponendo le condizioni

$$\begin{cases} 2x-2y+z-9=0 & \textit{appartenenza di A a } \pi \\ \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{1} & \textit{parallelismo tra } \vec{r} \textit{ e } \vec{u} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-2y+z-9=0 \\ x=2z-6 \\ y=-2z+3 \end{cases} \rightarrow 4z-12+4z-6+z-9=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \\ z=3 \end{cases}$$

Il punto di tangenza è $A(0;-3;3)$	La lunghezza del raggio è $\overline{KA}=\sqrt{4+4+1}=3$

Osservazione

Le equazioni $\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{1}$ costituiscono una rappresentazione cartesiana della retta KA, in accordo con il fatto che il punto A è l'intersezione tra il piano π e la retta ad esso perpendicolare, condotta da K.

Un altro metodo risolutivo potrebbe partire , pertanto, dalle equazioni parametriche della suddetta perpendicolare, prendendo come parametri direttori le componenti di $\vec{u}$

$$\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-1-2t \\ z=2+t \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di π

$$-4+4t+2+4t+2+t-9=0 \rightarrow t=1 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \\ z=3 \end{cases}$$