Quesito 9

Date le rette

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

e il punto $P(1,0,-2)$,determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

Soluzione

Il generico piano passante per $P(1,0,-2)$ha equazione

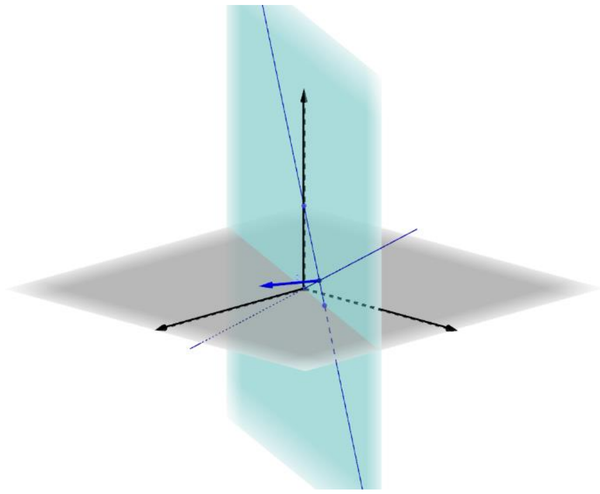
$$a(x-1) + by + c(z+2) = 0$$

dove i coefficienti (a,b,c), determinati a meno di un fattore di proporzionalità, sono le componenti di un vettore normale al piano stesso.

Prima di scegliere la strategia risolutiva studiamo la posizione reciproca delle due rette. che indicheremo rispettivamente con r ed s.

La prima è assegnata in forma parametrica, la seconda come intersezione di due piani (piano α di equazione $x + y + z - 3$ =0 e piano β di equazione

$2x - y = 0$).



Questo suggerisce di osservare innanzi tutto se esiste un punto $Q\ (t;2t;t)$ di r che appartenga anche ad s , ovvero che appartenga a entrambi i piani α e β.

Sostituendo

$$\begin{cases} t + 2t + t - 3 = 0 \\ 2t - 2t = 0 \end{cases}$$

osserviamo che la prima equazione è soddisfatta per $t = \frac{3}{4}$ mentre la seconda è soddisfatta $\forall\ t$.

Si conclude che entrambe le rette giacciono sul piano β e che si incontrano nel punto di coordinate $(\frac{3}{4};\frac{3}{2};\frac{3}{4})$.

Il vettore $\vec{n}$,di componenti $(2;-1;0)$, ortogonale a β , è perpendicolare a entrambe le rette e

il piano per P, parallelo a β ,di equazione $2(x-1) - y = 0$ è parallelo sia ad r che ad s.

Metodo più generale

Prescindendo dalla conoscenza della complanarità delle due rette e dell'equazione del piano su cui giacciono entrambe, imponiamo il parallelismo tra il generico piano passante per P e ciascuna delle due rette.

Scritta anche la seconda retta in forma parametrica

$$\begin{cases} x = k \\ y = 2k \\ z = 3 - 3k \end{cases}$$

si osserva che le due rette hanno parametri direttori $(1,2,1)$ e $(1,2,-3)$ rispettivamente; pertanto, non sono tra loro parallele.

Il vettore normale $\vec{n}$,di componenti $(a; b; c)$, deve essere ortogonale a entrambe le rette, cioè devono essere soddisfatte le due condizioni

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ a + 2b - 3c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -2b \end{cases}$$

Dovendo essere $b \neq 0$, altrimenti i coefficienti sarebbero tutti e tre nulli, possiamo porre $b = 1$ e, di conseguenza, $a = -2$

L'equazione del piano richiesto sarà

$$-2(x-1) + y = 0 \rightarrow -2x + y + 2 = 0 \rightarrow \mathbf{2x - y - 2 = 0}$$