MATURITA' 1991- terzo quesito

Si considerino due circonferenze di centri A e A' e, rispettivamente, di raggi 9 e 1, tangenti esternamente. Sia r la tangente comune in O ed s una retta tangente ad entrambe le circonferenze nei punti B e B'.

Detto C il punto di intersezione delle rette r ed s, si dimostri che i triangoli ACA' e BOB' sono rettangoli e si calcoli il rapporto delle loro aree.

Analisi del testo e della figura.

Il problema può essere affrontato in un piano cartesiano e risolto con gli strumenti della geometria analitica ma è interessante studiare tutte le proprietà della figura che permettono una diversità di approcci nella risoluzione di natura geometrica.

Le due circonferenze si corrispondono in un'omotetia di rapporto $|k|$ =9, il cui centro deve necessariamente appartenere alla retta AA' che congiunge i due centri e la sua distanza da essi deve rispettare il rapporto di omotetia.

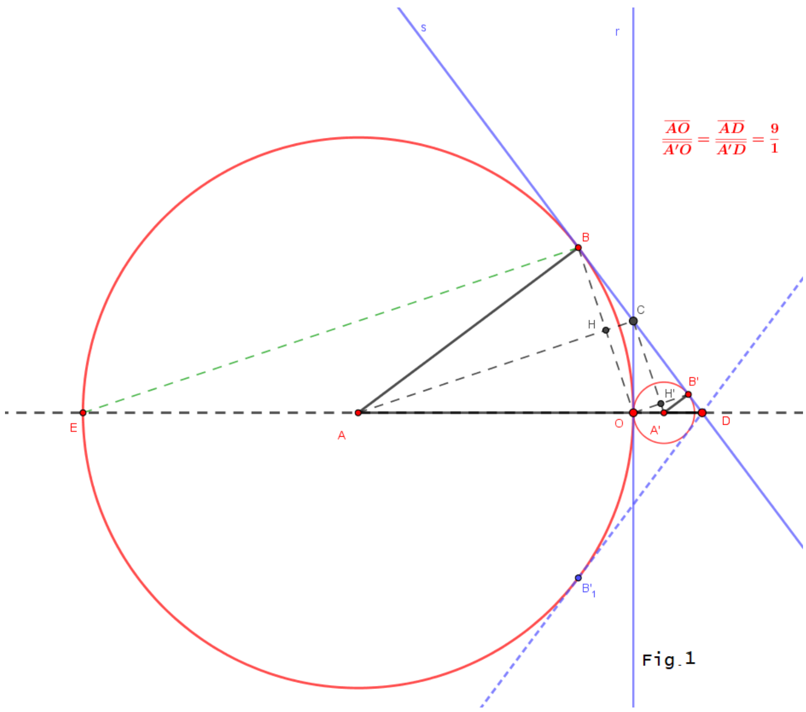


Fig.1

Se il centro è interno al segmento AA', l'omotetia è inversa e il centro non può che coincidere col punto O di tangenza.

Se il centro, indicato con D, è esterno al segmento AA', l'omotetia è diretta.

Per individuare il punto D imponiamo che $\frac{\overline{AD}}{\overline{A'D}} = \frac{9}{1}$ e, ponendo $\overline{AD} = d$,risolviamo l'equazione

$$d = 9(d - 10) \rightarrow d = \frac{45}{4}$$

Nella suddetta omotetia: D è unito; A corrisponde ad A' ; E corrisponde ad O; B corrisponde a B'; il triangolo ABD corrisponde a A'B'D.

I triangoli ACA’ e EBO sono tra loro simili, in quanto hanno i lati ordinatamente paralleli.

Costruzione delle rette r ed s, tangenti comuni alle due circonferenze

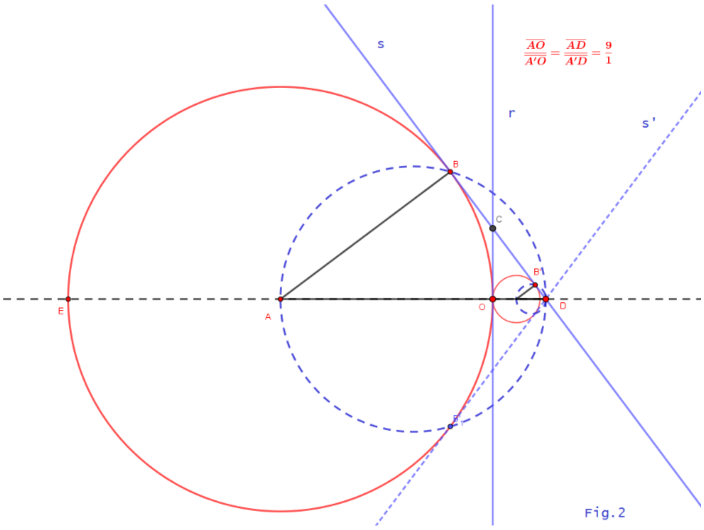


Fig.2

La tangente comune in O è perpendicolare alla congiungente i due centri

Per la costruzione di s ,si traccia la circonferenza di diametro AD e si indica con B una delle intersezioni con la circonferenza maggiore Σ (o analogamente, si costruisce la circonferenza di diametro A’D e si indica con B’ una delle intersezioni con la circonferenza minore Σ’)

Poiché il triangolo ABD è rettangolo in B, essendo inscritto in una semicirconferenza, la retta BD coincide con la retta tangente in B a Σ (analogamente, la retta B’D coincide con la retta tangente in B’ a Σ’) e incontra l’altra circonferenza in un punto tale che i triangoli ABD e A’B’D si corrispondono nell’omotetia di centro D e rapporto 9. Pertanto, BD è una tangente comune alle due circonferenze.

I punti simmetrici di B e di B’ rispetto alla retta AA’, individuano la terza tangente comune a Σ e Σ’

(per maggior precisione osserviamo che le tangenti comuni sono quattro, di cui due sono coincidenti nella retta r)

Soluzione_1

Osservazioni

Proprietà delle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza

- I segmenti di tangente CB, CO e CB’ sono tra loro congruenti
- Le rette CA e CA’ sono bisettrici degli angoli $B\hat{C}O$ e $O\hat{C}B'$, rispettivamente
- Le rette CA e CA’ sono assi rispettivamente della corda OB e della corda OB’

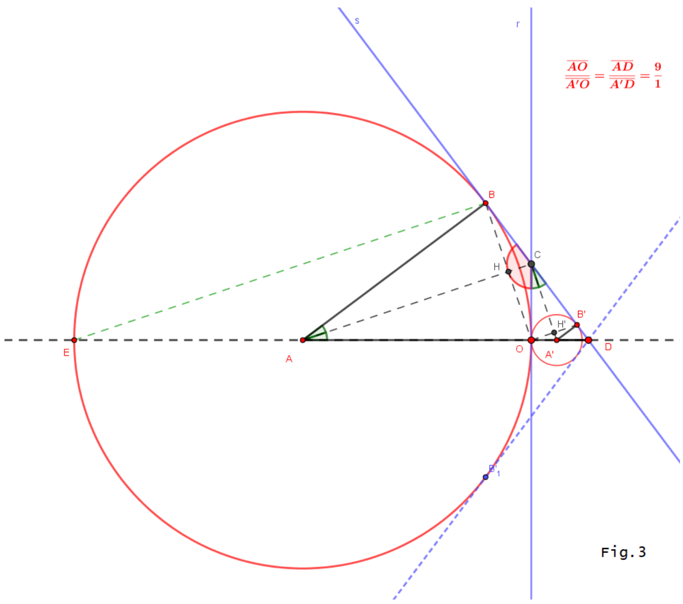
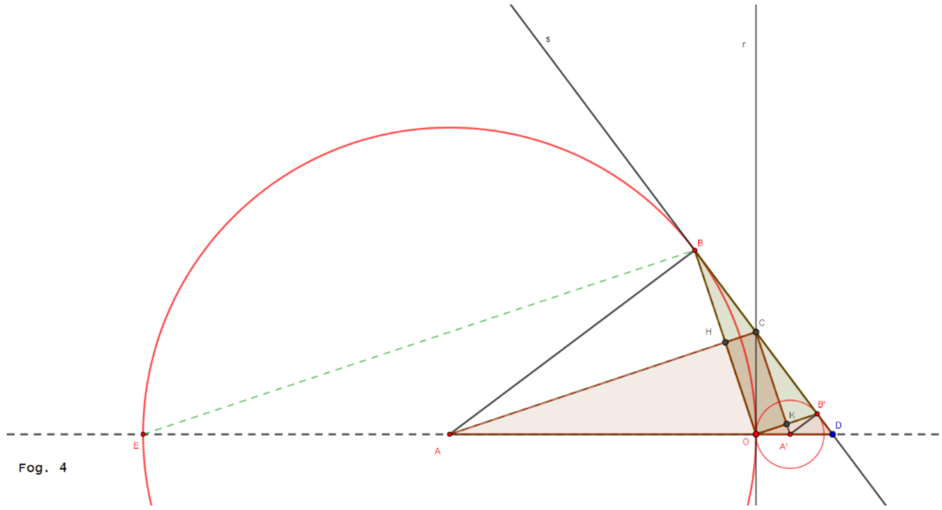


Fig.3

- Nel quadrilatero ABCO gli angoli in B e in O sono retti e quelli in A e in C sono tra loro supplementari

Risposte ai quesiti del testo



Fog. 4

1. **Detto C il punto di intersezione delle rette r ed s, si dimostri che i triangoli ACA' e BOB' sono rettangoli**

Il quadrilatero CHOK ha due angoli retti, in H e in K, pertanto se è retto l'angolo in C lo sarà anche l'angolo in O e viceversa.

Quindi, per rispondere alla prima domanda, è sufficiente dimostrare che uno dei due triangoli è rettangolo, affinché lo siano entrambi.

a) CA e CA' sono tra loro perpendicolari in quanto bisettrici di due angoli tra loro supplementari. Quindi il triangolo ACA' è rettangolo

b) Nel triangolo OBO' la mediana OC ha lunghezza uguale alla metà del lato BB'. Essendo , pertanto, inscrivibile in una semicirconferenza di diametro BB', il triangolo è rettangolo in O
Si può anche osservare che il segmento EB è il corrispondente di OB' nell'omotetia considerata, pertanto i due segmenti sono tra loro paralleli.
Essendo il triangolo EBO rettangolo in B perché inscritto in una semicirconferenza, anche OB' sarà perpendicolare a BO

2. **Si calcoli il rapporto delle loro aree**

a) I triangoli rettangoli ACA' e BOB' sono tra loro simili in quanto gli angoli $A'\hat{A}C$ e $O\hat{B}B'$ sono tra loro congruenti

infatti: se $O\hat{A}B = 2\alpha$ sarà $A'\hat{A}C = \alpha$

$$B\hat{C}O = \pi - 2\alpha \rightarrow \mathrm{B\hat{C}A} = \frac{\pi}{2} - \alpha \rightarrow \mathrm{O\hat{B}C} \equiv O\hat{B}B' = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha$$

oppure

si osserva che $O\hat{A}B$ è angolo al centro e $O\hat{B}B'$ è angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco AB (caso limite)

quindi

$O\hat{B}B' = \frac{1}{2}\, O\hat{A}B = \alpha$

Il rapporto delle aree dei due triangoli è uguale al quadrato del rapporto di due lati omologhi, per esempio delle due ipotenuse

AA' ha lunghezza 10 (somma dei raggi)

BB' Ha lunghezza doppia del segmento CO, che per il secondo teorema di Euclide, essendo medio proporzionale tra AO e OA', è lungo 3. Pertanto, $\overline{BB'} = 6$ → Rapporto delle aree = $\frac{100}{36}$=$\frac{25}{9}$

$$Area_{ACA'} = \frac{25}{9} Area_{\ BOB'}$$

b) Come già osservato, il segmento EB è il corrispondente di OB' nell'omotetia considerata, pertanto

$$\overline{OB'} = \frac{1}{9}\ \overline{EB}$$

I triangoli EBO e BOB' hanno in comune il cateto OB, pertanto il rapporto delle loro aree è uguale al rapporto degli altri due cateti

$$Area_{BOB'} = \frac{1}{9} Area_{\ EBO}$$

I triangoli ACA' e EBO sono tra loro simili, in quanto hanno i lati ordinatamente paralleli. Il rapporto di similitudine è $\frac{\overline{AA'}}{\overline{EO}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$ pertanto

$$Area_{ACA'} = \frac{25}{81} Area_{\ EBO}$$

Per confronto

$$Area_{ACA'} = \frac{25}{9} Area_{\ BOB'}$$

Soluzione_2-Procedimento analitico.

Introduciamo un opportuno sistema di riferimento cartesiano scegliendo O come origine, AA' come asse x e la retta r come asse y.

Si ha $A(-9;0)$ $A'(1;0)$

a) Equazioni delle due circonferenze

$x^2 + y^2 + 18x = 0$ centro A e raggio =9

$x^2 + y^2 - 2x = 0$ centro A' e raggio =1

b) Equazioni delle tangenti comuni e coordinate dei punti di contatto

La retta r ha ovviamente equazione x=0

Per determinare le altre tangenti comuni alle due circonferenze si può partire dall'equazione della retta generica del piano nella forma $y = mx + q$

La retta s gode della proprietà che la sua distanza dal centro di ciascuna delle due circonferenze è uguale al rispettivo raggio

Imponiamo $\begin{cases} \frac{|m+q|}{\sqrt{1+m^2}} = & 1 \\ \frac{|-9m+q|}{\sqrt{1+m^2}} = & 9 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} m^2 + q^2 + 2mq = & 1 + m^2 \\ 81m^2 + q^2 - 18mq = & 81 + 81m^2 \end{cases}$ sottraendo membro a membro e semplificando

$$20mq = -80 \rightarrow \begin{cases} mq = & -4 \\ q^2 - 8 = & 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = & \mp\frac{4}{3} \\ q = & \pm 3 \end{cases}$$

Le possibili equazioni della retta s sono $y = -\frac{4}{3}x + 3$ $y = \frac{4}{3}x - 3$

Osservazione

Le condizioni di tangenza costituiscono un sistema algebrico di grado 4, mentre l'equazione risolvente si è ridotta a grado 2.

La forma ridotta dell'equazione della retta, $y = mx + q$ non consente infatti di determinare le rette tangenti parallele all'asse y, che, come abbiamo osservato, esistono e coincidono con la retta r.

Le due rette sono tra loro simmetriche rispetto all'asse x (retta AA')

La prima incontra sia l'asse y , sia le due circonferenze, in punti del semipiano $y > 0$, la seconda in punti del semipiano $y < 0$-

Prendiamo in considerazione la prima retta che incontra l'asse y nel punto $C(0;3)$ e l'asse x nel punto $D\left(\frac{9}{4};0\right)$.

Per determinare le coordinate dei punti B e B' del semipiano $y > 0$ risolviamo i due sistemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 18x = 0 \\ y = -\frac{4}{3}x + 3 \end{cases} \rightarrow 25x^2 + 90x + 81 = 0 \rightarrow (5x+9)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{5} \\ y = \frac{27}{5} \end{cases} \quad \textit{coordinate di } B$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = -\frac{4}{3}x + 3 \end{cases} \rightarrow 25x^2 - 90x + 81 = 0 \rightarrow (5x-9)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \textit{coordinate di } B'$$

c) I coefficienti angolari delle rette CA e CA' sono , rispettivamente,

$$\frac{3-0}{0-(-9)} = \frac{1}{3} \qquad \frac{0-3}{1-0} = -3$$

e soddisfano, pertanto, la condizione di perpendicolarità $mm' = -1$

Il triangolo ACA' è quindi rettangolo in C.

I coefficienti angolari delle rette OB e OB' sono , rispettivamente,

$$\frac{\frac{27}{5}}{-\frac{9}{5}} = -3 \qquad \frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{1}{3}$$

e soddisfano, pertanto, la condizione di perpendicolarità $mm' = -1$

Il triangolo BOB' è quindi rettangolo in O.

d) **Rapporto delle aree**

L'area del triangolo ACA' è uguale a $\frac{\overline{AA'}\cdot\overline{CO}}{2}$ = 15

L'area del triangolo BOB' può essere calcolata come differenza tra l'area del triangolo BOD e l'area del triangolo $B'OD$

L'area del triangolo BOD, considerando il segmento DO come base e l'ordinata di B come valore dell'altezza, è uguale a $\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{27}{5}$

L'area del triangolo B'OD, considerando il segmento DO come base e l'ordinata di B' come valore dell'altezza, è uguale a $\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{5}$

$$Area_{BOB'} = Area_{BOD} - Area_{B'OD} = \frac{9}{8}\left(\frac{27}{5} - \frac{3}{5}\right) = \frac{9}{8}\cdot\frac{24}{5} = \frac{27}{5}$$

$\frac{Area_{ACA'}}{Area_{BOB'}} = 15\cdot\frac{5}{27} = \frac{25}{9}$

Approfondimento

L'omotetia

Il centro D dell'omotetia, che trasforma la circonferenza minore in quella maggiore, si può determinare per via analitica a partire dalle equazioni

$$\begin{cases} X = 9(x - x_D) + x_D \\ Y = 9(y - y_D) + y_D \end{cases}$$

Imponendo la corrispondenza dei due centri $A(-9;0)$ e $A'(1;0)$ si ottiene

$$\begin{cases} -9 = 9(1 - x_D) + x_D \\ 0 = 9(0 - y_D) + y_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x_D = 18 \\ 8y_D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_D = \frac{9}{4} \\ y_D = 0 \end{cases}$$

Confronto con il risultato precedente

$$\overline{AD} = d = \frac{45}{4}$$

$$\overline{AD} = x_D - x_A = \frac{9}{4} + 9 = \frac{45}{4}$$

Le equazioni

$$\begin{cases} X = & 9(x - \frac{9}{4}) + \frac{9}{4} \\ Y = & 9y \end{cases}$$

permettono di verificare per via analitica le corrispondenze citate nel corso della soluzione geometrica-

Verificiamo, ad esempio che $B'(\frac{9}{5}, \frac{3}{5})$ viene trasformato in B (-$\frac{9}{5}$; $\frac{27}{5}$)

$$\begin{cases} -\frac{9}{5} = & 9(\frac{9}{5} - \frac{9}{4}) + \frac{9}{4} \\ \frac{27}{5} = & 9 \cdot \frac{3}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{9}{5} = & -\frac{81}{20} + \frac{9}{4} = -\frac{36}{20} \\ \frac{27}{5} = & 9 \cdot \frac{3}{5} \end{cases}$$