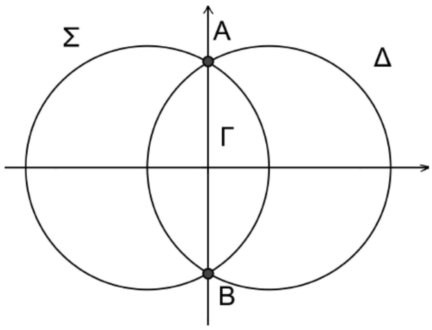
PROBLEMA 1

PROBLEMA 1

I due cerchi Σ e Δ, in figura, hanno uguale raggio 4 e i rispettivi centri nei punti $(-2;0)$ e $(2;0)$. Con Γ è denotata la loro parte comune e con A e B le intersezioni delle loro circonferenze.

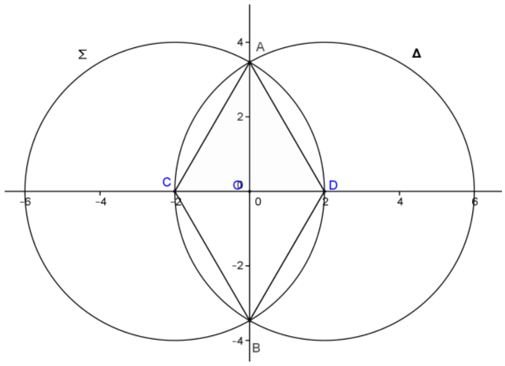


1. Si calcoli l'area di Γ.
2. Fra tutti i rettangoli inscritti in Γ e aventi i lati paralleli agli assi cartesiani, si determini quello di perimetro massimo.
3. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione di 180° di Γ attorno all'asse x.
4. Preso un punto P sulla circonferenza Σ, si indichi con Q l'ulteriore intersezione della retta PA con la circonferenza Δ. Si provi che il triangolo PQB è equilatero e si determini la posizione di P affinchè il triangolo abbia lato massimo.

SOLUZIONE

1. I due cerchi sono tra loro simmetrici rispetto all'asse y.

La regione Γ è la somma di due segmenti circolari aventi in comune la corda AB e tra loro congruenti. Indicati con C e D, rispettivamente, i centri di Σ e di Δ, i segmenti AC, AD, CD, CB, DB sono tra loro congruenti ed hanno lunghezza 4, pertanto



- i triangoli ACD e BCD sono equilateri
- gli angoli $A\hat{C}B$ e $A\hat{D}B$ hanno ampiezza $\frac{2}{3}\pi$
- Le coordinate dei punti comuni alle due circonferenze sono

$$A(0;2\sqrt{3}) \quad B(0;-2\sqrt{3})$$

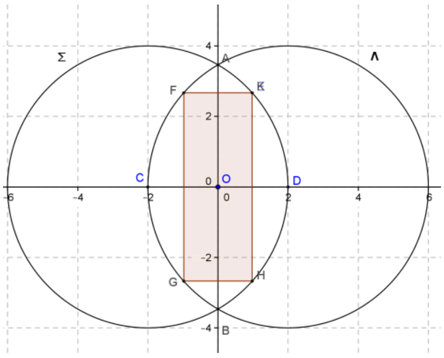
Osserviamo ancora che

- l'area di ciascuno dei due triangoli ACB e ADB è uguale a $4\sqrt{3}$
- l'area di ciascuno dei due settori circolari ACB e ADB , pari a $\frac{1}{3}$ di cerchio ,è uguale a $\boldsymbol{\frac{16\pi}{3}}$
- l'area di ciascuno dei segmenti circolari minori, aventi per base la corda AB, è uguale a $\frac{16\pi}{3}$ - $4\sqrt{3}$

L'area della regione Γ è uguale a $\mathbf{2(\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}) \cong 19,65}$

2. Il perimetro del rettangolo inscritto in Γ e avente i lati paralleli agli assi cartesiani , può essere espresso nella forma $\mathrm{F(x;y)} = 4\mathrm{x} + 4\mathrm{y}$, dove x ed y rappresentano le coordinate (entrambe positive) di un punto del'arco AD della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x = 12$.

La funzione da ottimizzare può essere sostituita da



$g(x;y) = \frac{1}{4}\mathrm{F}(x;y) = x + y$

I vincoli sono rappresentati dal sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 12 \\ 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2\sqrt{3} \end{cases}$

Casi limite

$x = 0 \quad y = 2\sqrt{3} \quad \rightarrow \textit{rettangolo degenere di perimetro } 8\sqrt{3}$

$x = 2 \quad y = 0 \quad \rightarrow \textit{rettangolo degenere di perimetro } 8$

Per determinare il rettangolo di perimetro massimo si propongono due strategie risolutive

A) Metodo analitico

La funzione $g(x;y)$ *può essere espressa in funzione della sola* x*, essendo* $y = \sqrt{-x^2 - 4x + 12}$

$f(x) = x + \sqrt{-x^2 - 4x + 12}$ con $0 \le x \le 2$

Studio del segno della derivata $f'(x) = 1 - \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x+12}}$

$$f'(x) > 0 \rightarrow \quad 1 > \frac{x+2}{\sqrt{-x^2 - 4x + 12}} \quad \rightarrow \quad -x^2 - 4x + 12 > x^2 + 4x + 4 \quad \rightarrow \quad 2x^2 + 8x - 8 < 0$$

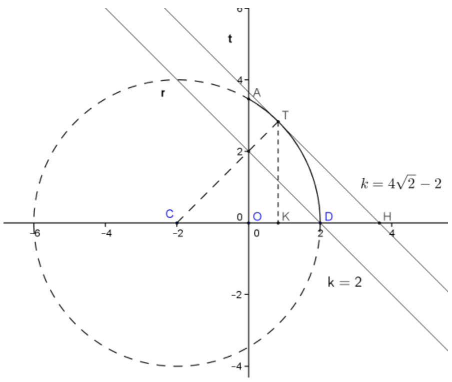
Tenendo conto delle limitazioni imposte alla x, la disequazione è risolta per 0< $x < -2 + 2\sqrt{\mathbf{2}}$

La funzione $f(x)$ cresce da 0 a $-2 + 2\sqrt{2}$ e poi decresce

Il perimetro massimo si ha per $\boldsymbol{x = -2 + 2\sqrt{2} \rightarrow y = 2\sqrt{2} \rightarrow perimetro = -8 + 16\sqrt{2}}$

B)Metodo geometrico

Si consideri il fascio di rette di equazione $x + y = k$ e tra queste :



- la retta r che passa per il punto D $\rightarrow$ **k=2**
- la retta t tangente all'arco AD in T$\rightarrow$ $\mathbf{k = 4\sqrt{2} - 2}$

Le coordinate del punto T di tangenza possono essere determinate mediante semplici considerazioni geometriche nel triangolo rettangolo isoscele CTK:

$\overline{CK} = \overline{TK} = 2\sqrt{2}$

$\overline{OK} = \overline{CK} - \overline{CO} \quad \rightarrow \overline{OK} = 2\sqrt{2} - 2$

Pertanto il punto T ha coordinate $(2\sqrt{2} - 2; 2\sqrt{2})$ *e la retta t corrisponde al valore*

$\boldsymbol{k = 4\sqrt{2} - 2}$

Le rette del fascio che incontrano l'arco AD appartengono alla striscia individuate dalle rette **r** e **t** e corrispondono ai valori $\mathbf{2 \le \boldsymbol{k} \le 4\sqrt{2} - 2}$

T è il punto per cui è massima la somma $x + y$ delle coordinate (il valore massimo è $\boldsymbol{k = 4\sqrt{2} - 2}$**) e** corrisponde alla posizione del vertice del rettangolo per cui il perimetro assume valore massimo

$E(2\sqrt{2}-2;2\sqrt{2})$ $\quad$ $perimetro = 4k = 16\sqrt{2}$ -- 8

3. Essendo Γ simmetrica rispetto all'asse di rotazione, Il solido ottenuto in una rotazione di 180° coincide con quello generato in una rotazione completa della porzione di Γ appartenente al semipiano delle y positive (o negative).

Il volume, pari alla somma dei volumi dei due segmenti sferici aventi in comune la base (il cerchio di raggio OA) e altezza uguale a $\overline{OC} = \overline{OD}$, può essere determinato mediante il calcolo integrale

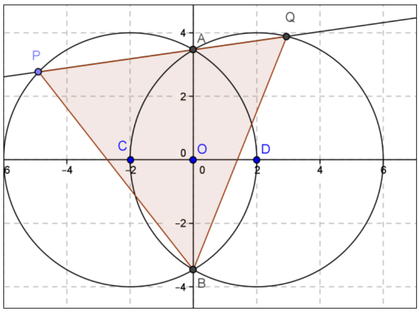
$$V = 2\pi\int_0^2(-x^2-4x+12)\,dx = 2\pi\left[-\frac{1}{3}x^3-2x^2+12x\right]_0^2 = 2\pi\frac{40}{3} \cong 83,78$$

4. Poiché la lunghezza della corda AB è uguale a quella del lato del triangolo equilatero inscritto in ciascuna delle due circonferenze, qualunque sia la posizione di P, gli angoli alla circonferenza $A\hat{P}B$ e $A\hat{Q}B$ hanno ampiezza $\frac{\pi}{3}$ o $\frac{2}{3}\pi$, a seconda che insistano sul minore o sul maggiore degli archi AB, nelle rispettive circonferenze.

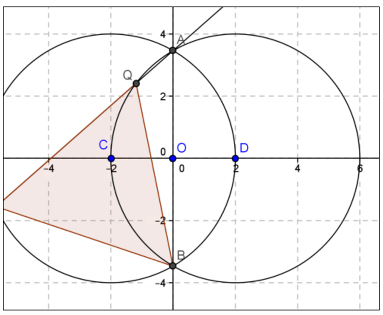
Gli angoli $Q\hat{P}B$ e $P\hat{Q}B$ hanno , invece, sempre ampiezza $\frac{\pi}{3}$, come si può osservare, ad esempio, nelle figure seguenti

nella figura a : $Q\hat{P}B \equiv A\hat{P}B$, $P\hat{Q}B \equiv A\hat{Q}B$ ed hanno ampiezza $\frac{\pi}{3}$

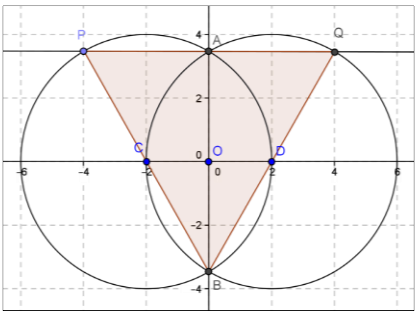
nella figura b: $Q\hat{P}B \equiv A\hat{P}B$, mentre $P\hat{Q}B$ coincide con il supplementare di $A\hat{Q}B$ il quale ha ampiezza $\frac{2}{3}\pi$



a



b



c

Il triangolo PQB è equilatero, qualunque sia la posizione di P

I lati PB e QB sono corde delle circonferenze di raggio 4, pertanto assumono valore massimo quando coincidono con un diametro → lunghezza =8

Affinché ciò accada, P deve trovarsi sulla retta che congiunge il punto B con il punto C → $P(-4;2\sqrt{3})$ (figura c)