

Quesito 3

Dimostrare che, se in un parallelogramma si tracciano le due diagonali, esso viene suddiviso in quattro triangoli di area uguale. Discutere la validità o meno dell'affermazione inversa: se un quadrilatero convesso viene suddiviso dalle sue diagonali in quattro triangoli di uguale area, allora esso è un parallelogramma.

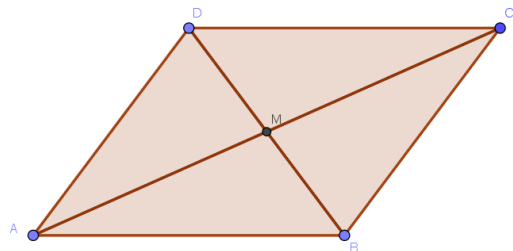
Soluzione

A) Ipotesi

Il quadrilatero ABCD è un parallelogramma

Tesi

Indicato con M è il punto di incontro delle diagonali, i quattro triangoli AMB, AMD, DMC, CMB hanno uguale area



Dimostrazione

a)

Il triangolo AMB è congruente, quindi equivalente, al triangolo DMC e il triangolo AMD è congruente, quindi equivalente, al triangolo BMC per il secondo criterio di congruenza.

Infatti

AB è congruente a DC essendo lati opposti di un parallelogramma

Gli angoli \widehat{MAB} e \widehat{MCD} , come anche gli angoli \widehat{MBA} e \widehat{MDC} hanno uguale ampiezza perché alterni interni rispetto alle parallele AB e DC tagliate dalle trasversali AC e BD, rispettivamente

In modo analogo si dimostra che sono congruenti gli angoli \widehat{MAD} e \widehat{MCB} come anche \widehat{MDA} e \widehat{MCB}

Da queste congruenze discende che il punto M è punto medio di ciascuna diagonale.

b) I triangoli AMB e BMC hanno uguale area in quanto hanno le basi AM e MC congruenti, per quanto dimostrato al punto a, e stessa altezza relativa (distanza del vertice B dalla retta AC).

c) I triangoli AMD e DMC hanno la stessa area degli altri due perché congruenti rispettivamente a BMC e AMB, pertanto i quattro triangoli hanno la stessa area.

c.v.d.

B) Ipotesi

Nel quadrilatero ABCD, M è il punto di incontro delle diagonali e i quattro triangoli AMB, AMD, DMC, CMB hanno uguale area

Tesi

Il quadrilatero ABCD è un parallelogramma

Osservazione

Per dimostrare che il quadrilatero è un parallelogramma è sufficiente dimostrare che M è il punto medio delle diagonali.

Infatti, se le due diagonali si incontrano nel loro punto medio, questo diventa centro di simmetria del quadrilatero, che avrà pertanto i lati opposti congruenti e paralleli.

Dimostrazione

I triangoli AMB e BMC hanno la stessa altezza (distanza del vertice B dalla retta AC) quindi, se hanno uguale area devono avere basi congruenti. Pertanto

M è il punto medio di AC

In modo analogo si dimostra che

M è il punto medio di BD

Se le diagonali si incontrano nel loro punto medio allora il quadrilatero è un parallelogramma.

c.v.d.