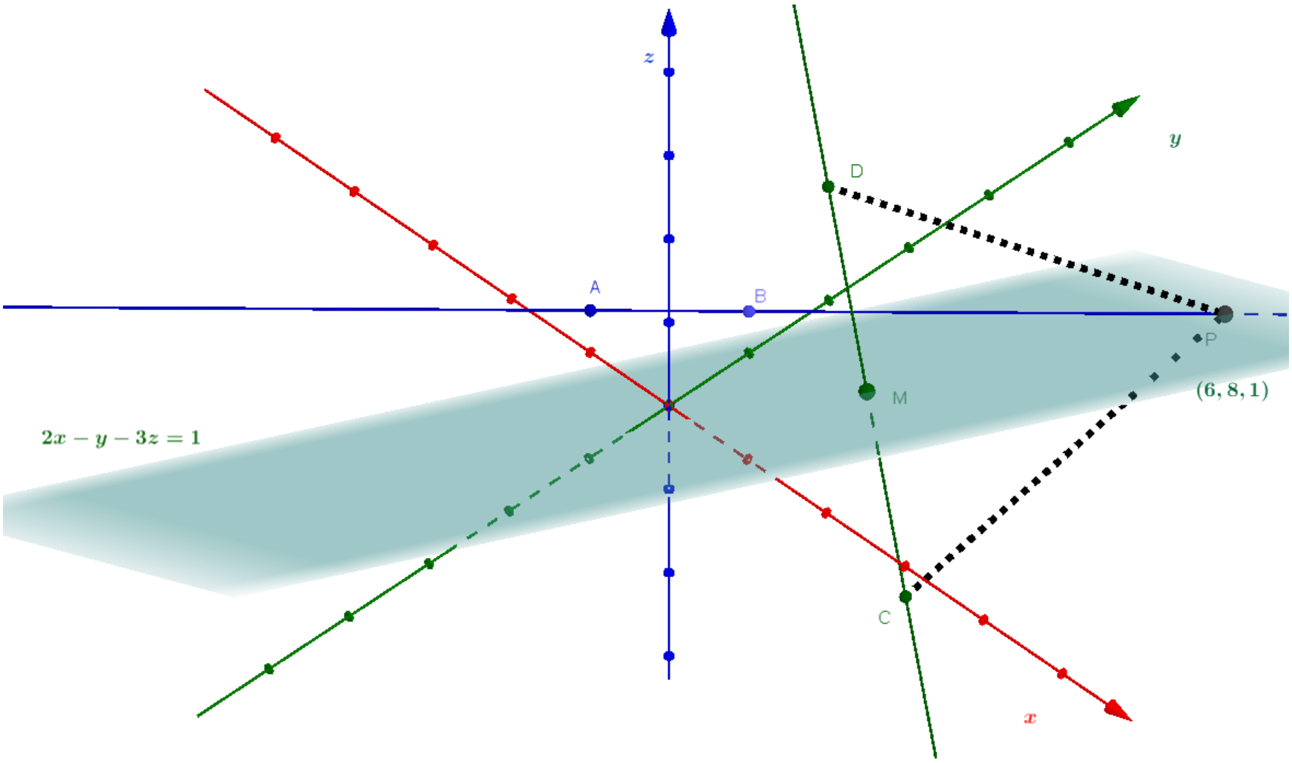
Quesito 4.

Nello spazio tridimensionale, sia r la retta passante per i punti $A(-2,\ 0,\ 1)$ e $B(0,\ 2,\ 1)$. Determinare le coordinate di un punto appartenente alla retta r che sia equidistante rispetto ai punti $C(5,\ 1,-2)$ e $D(1,\ 3,\ 4)$.

Soluzione



Primo metodo

Dati due punti $A(x_A\ ; y_A\ \ ; z_A)$ e $B(x_B\ ; y_B\ \ ; z_B)$ la retta r congiungente A e B può essere considerata come la retta per A nella direzione del vettore $\vec{v}$ =B-A $(x_B\ \ - x_A\ ;\ y_B\ \ - y_A\ \ ;\ z_B - z_A)$

Le equazioni parametriche della retta AB in R^3 si trovano aggiungendo alle coordinate del punto A le componenti di un multiplo di $\vec{v}$

$$r \begin{cases} x = & -2 + t\ (2) \\ y = & 0 + t(2) \\ z = & 1 + t(0) \end{cases}$$

Un generico punto di r ha coordinate $P\ (-2 + 2t; 2t; 1)$

Poiché P deve essere equidistante da C e da D, si impone

$$(-2+2t-5)^2+(2t-1)^2+(1+2)^2=(-2+2t-1)^2+(2t-3)^2+(1-4)^2 \rightarrow$$

$(-7+2t)^2+(2t-1)^2= 2(2t-3)^2 \rightarrow$

$$49+4t^2-28\,t+4t^2+1-4t=8t^2+18-24t \rightarrow$$
$$-8t=-32 \rightarrow t=4$$

Il punto P di r equidistante da C e da D è

$P\ (6;8;1)$

Secondo metodo

Il punto P è l'intersezione della retta AB con il piano perpendicolare al segmento CD e passante per il punto medio M (3;2;1)

Le equazioni della retta AB sono $\begin{cases} x-y+2= & 0 \\ z= & 1 \end{cases}$

Infatti, la retta AB appartiene al piano $z=1$ e al piano $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{2} \rightarrow x-y+2=0$

La retta CD ha i parametri direttori proporzionali alla terna $(4,-2,-6)\quad o\ anche\ alla\ terna\ (2;-1;-3).$

Il piano ad essa perpendicolare, per il punto M ha equazione

$$2(x-3)-(y-2)-3(z-1)=0$$

$2x-y-3z-1=0$

Il punto P è l'intersezione dei 3 piani

$$\begin{cases} x-y+2= & 0 \\ z= & 1 \\ 2x-y-3z= & 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2= & y \\ z= & 1 \\ 2x-x-2-3= & 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y+2= & 0 \\ z= & 1 \\ x= & 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$P\begin{cases} x= & 6 \\ y= & 8 \\ z= & 1 \end{cases}$$