QUESITO 4

Considerati i punti A(2,3,6), B(6,2,-3), C(3,-6,2) nello spazio tridimensionale, verificare che i segmenti OA, OB, OC (dove il punto O indica l'origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo.
Determinare il raggio e il centro della sfera S circoscritta a tale cubo.

Soluzione

Per verificare che i segmenti OA, OB e OC siano i tre spigoli di un cubo dobbiamo verificare la congruenza dei tre segmenti: $\overline{OA} = \overline{OB}=\overline{OC}$

$$\overline{OA} = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{49} = 7$$

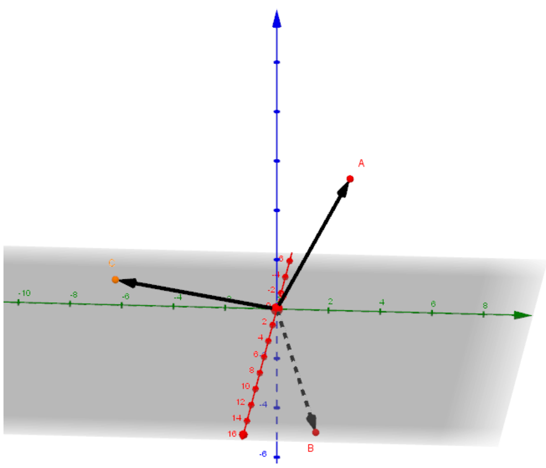
$$\overline{OB} = \sqrt{(6-0)^2 + (2-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\overline{OC} = \sqrt{(3-0)^2 + (-6-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{49} = 7$$

e la mutua perpendicolarità; per far ciò prendiamo in considerazione il vettore direzione della retta OA che è $\vec{v}(2,3,6)$, quello della retta OB che è $\vec{v}'(6,2,-3)$ e quello della retta OC che è $\vec{v}''(3,-6,2)$.

Affinché OA sia perpendicolare a OB si deve avere:

$$\vec{v}\; x\; \overrightarrow{v'} = 0 \quad \to \quad v_x v'_x + v_y v'_y + v_z v'_z = 0$$
$$\to \quad 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = 0 \quad c.v.d.$$



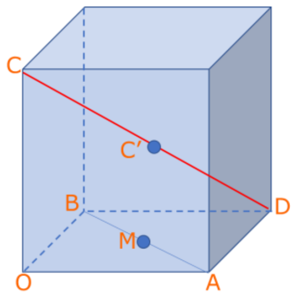
affinché OA sia perpendicolare a OC si deve avere:

$$\vec{v}\; x\; \overrightarrow{v''} = 0 \quad \to \quad v_x v''_x + v_y v''_y + v_z v''_z = 0$$
$$\to \quad 2 \cdot 3 - 3 \cdot 6 + 6 \cdot 2 = 0 \quad c.v.d.$$

affinché OB sia perpendicolare a OC si deve avere:

$$\overrightarrow{v'}\; x\; \overrightarrow{v''} = 0 \quad \to \quad v'_x v''_x + v'_y v''_y + v'_z v''_z = 0 \quad \to \quad 6 \cdot 3 - 2 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 0 \quad c.v.d$$

Poiché le diagonali del cubo, la cui lunghezza è $7\sqrt{3}$,sono diametri della sfera circoscritta, la lunghezza del raggio è pari a $\frac{7\sqrt{3}}{2}$, mentre il centro C’ è il punto di incontro delle diagonali stesse, ovvero il loro punto medio.



Pertanto, determiniamo prima il punto medio M della diagonale AB del quadrato di base del cubo

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$$

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2}$$

Poiché il vertice D è il simmetrico di O rispetto a C’,

$$x_D = 2x_M - x_O = 8$$

$$y_D = 2y_M - y_O = 5$$

$$z_D = 2z_M - z_O = 3$$

Il centro C’ della sfera è il punto medio M’ della diagonale CD:

$$x_{C'} = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{3+8}{2} = \frac{11}{2}$$

$$y_{C'} = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{-6+5}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$z_{C'} = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

In alternativa si può determinare l'equazione della sfera imponendo il passaggio per i quattro punti

$$O(0;0;0)\,,\quad A(2{,}3{,}6),\quad B(6{,}2,-3),\qquad C(3,-6{,}2)$$

L'equazione di una sfera passante per l'origine ha la forma

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz=0$$

Sostituendo le coordinate degli altri tre punti e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2a+6b+6c+49 & = & 0 \\ 6a+2b-3c+49 & = & 0 \\ 3a-6b+2c+49 & = & 0 \end{cases}$$

si trova $\begin{cases} a = & -11 \\ b = & 1 \\ c = & -5 \end{cases}$

Pertanto, l'equazione della sfera è $x^2+y^2+z^2-11x+y-5z=0$ da cui si possono determinare le coordinate del centro $C'(\frac{11}{2};-\frac{1}{2};\frac{5}{2})$

La misura del raggio è $\sqrt{\frac{121}{4}+\frac{1}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{147}{4}}=\frac{7\sqrt{3}}{2}$