QUESITO 6

Determinare l'equazione della superficie sferica S, con centro sulla retta

$$r\begin{cases} x = & t \\ y = & t \quad t \in R \\ z = & t \end{cases}$$

tangente al piano π: $3x - y - 2z + 14 = 0$ *nel punto* $T(-4; 0; 1))$

Soluzione

Il centro C della superficie sferica, oltre che alla retta r, deve appartenere alla retta p perpendicolare al piano π e passante per T.

La retta p , assumendo come I parametri direttori i coefficienti delle incognite nell'equazione di π, i quali rappresentano le componenti di un vettore normale al piano stesso, può essere rappresentata nella forma seguente

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-2}.$$

Imponendo il passaggio per un generico puto di r, di coordinate (t, t, t)

si ottiene $\frac{t+4}{3} = \frac{t}{-1} = \frac{t-1}{-2} \rightarrow \begin{cases} t+4 = & -3t \\ 2t = & t-1 \end{cases} \rightarrow t = -1 \rightarrow\rightarrow C(-1; -1; -1)$

C è il centro di S, mentre il suo raggio è uguale a

$$\overline{CT} = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{14}$$

L'equazione della superficie sferica S è $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 14 \rightarrow$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 11 = 0$$

Osservazione

Per una soluzione più generale dei primo punto (calcolo delle coordinate di C) studiamo il sistema in tre equazioni e due incognite che si ottiene eliminando le incognite x, y, z tra le equazioni parametriche delle due rette

$$r\begin{cases} x = & t \\ y = & t \quad t \in R \\ z = & t \end{cases} \qquad p\begin{cases} x = & -4 + 3k \\ y = & -k \quad k \in R \\ z = & 1 - 2k \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} t - & 3k = & -4 \\ t + & k = & 0 \\ t + & 2k = & 1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti delle incognite $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e la matrice completa , con la colonna dei termini noti, $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ hanno entrambe rango 2.

Infatti, è immediato osservare che, nella prima , i 3 minori di ordine 2 sono tutti diversi da 0 (è sufficiente comunque verificare che ne esiste almeno uno non nullo, ad esempio quello formato dalle prime due righe), minori che fanno parte anche della seconda matrice.

La matrice completa non ha rango 3 in quanto il suo determinante, calcolato con la regola di Sarrus, ha valore

$$1-8+4+3=0$$

Per il Teorema di Rouché -Capelli, pertanto , il sistema ammette una e una sola soluzione, che si può calcolare risolvendo il sistema costituito dalle prime due equazioni $\begin{cases} t-3k= & -4 \\ t+k= & 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k= & 1 \\ t= & -1 \end{cases}$

A questi valori dei parametri corrisponde il punto C di coordinate

$$\begin{cases} x= & -1 \\ y= & -1 \\ z= & -1 \end{cases}$$