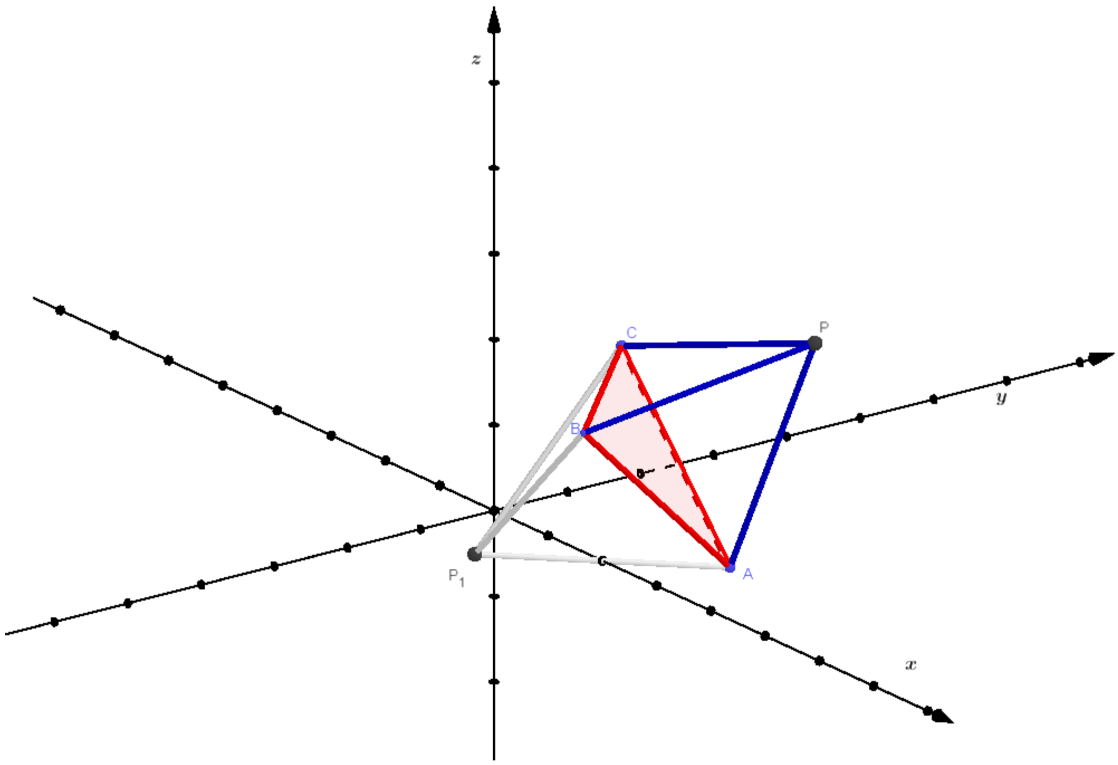
QUESITO 9

Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti A(3,1,0), B(3,-1,2), C(1,1,2). Dopo aver verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano α di equazione $x+y+z-4=0$, *stabilire quali sono i punti P tali che ABCP sia un tetraedro regolare*

Soluzione



I tre punti sono vertici di un triangolo equilatero di lato $2\sqrt{2}$

Infatti

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-3)^2+(-1-1)^2+(2-0)^2} = \sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-3)^2+(1-1)^2+(2-0)^2} = \sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1-3)^2+(1+1)^2+(2-2)^2} = \sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

I tre punti appartengono al piano assegnato in quanto le coordinate di ciascuno di essi ne soddisfano l'equazione

$3+1+0-4=0$,

$3-1+2-4=0$,

$1+1+2-4=0$,

Il quarto vertice di un tetraedro regolare costruito sul triangolo ABC deve essere equidistante dai tre vertici e il valore della suddetta distanza deve essere uguale alla lunghezza dello spigolo.

PRIMO METODO

Indicato con $P(x;y;z)$ un generico punto dello spazio, imponiamo

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 & = & 8 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 & = & 8 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 & = & 8 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la prima equazione dalla seconda, si ottiene $4y - 4z + 4 = 0 \rightarrow$

$$y = z - 1$$

Eliminando la variabile y, nella seconda e terza equazione, si ottiene il sistema in due incognite

$$\begin{cases} (x-3)^2 + z^2 + (z-2)^2 = & 8 \\ \quad (x-1)^2 + 2(z-2)^2 \;= & 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 + 2z^2 - 4z + 4 = & 8 \\ x^2 - 2x + 1 + 2z^2 - 8z + 8 = & 8 \end{cases}$$

Sottraendo

$$4x - 4z - 4 = 0 \rightarrow x = z + 1$$

Sostituendo nella terza equazione

$$z^2 + 2(z-2)^2 - 8 = 0 \rightarrow 3z^2 - 8z = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} x = & 1 \\ y = & -1 \\ z = & 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x = & \frac{11}{3} \\ y = & \frac{5}{3} \\ z = & \frac{8}{3} \end{cases}$$

SECONDO METODO

Ricordiamo che il luogo geometrico dei punti, dello spazio, equidistanti dai tre vertici di un triangolo è la retta p perpendicolare al piano del triangolo stesso e passante per il suo circocentro, H.

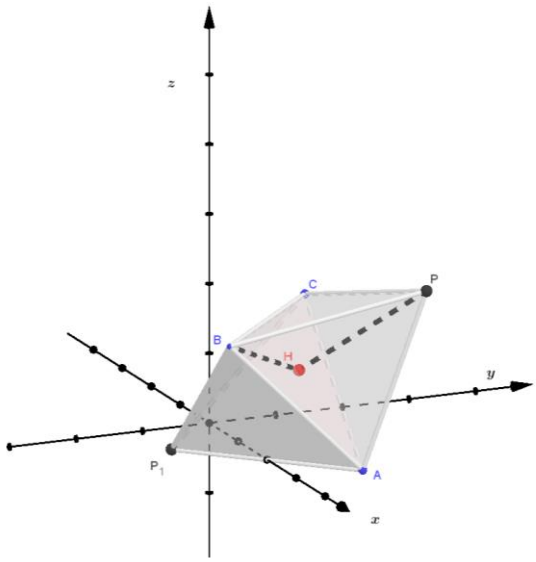
Il quarto vertice del tetraedro è pertanto un punto P di p tale che

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = 2\sqrt{2}$$

ovvero tale che

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PB}^2 - \overline{BH}^2} \;=\; \sqrt{8 - \frac{8}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

Infatti. poiché nel triangolo ABC, equilatero, il circocentro H è anche baricentro, la distanza BH è uguale $\frac{2}{3}$ dell'altezza del triangolo: $\overline{BH} = \frac{2}{3}\,\frac{2\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$



Equazioni parametriche della retta PH

Le coordinate del baricentro di ABC sono

$$H\begin{cases} x_H = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_B = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_B = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{3+3+1}{3} \\ y_B = \dfrac{1-1+1}{3} \\ z_B = \dfrac{0+2+2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x_H = \dfrac{7}{3} \\ y_B = \dfrac{1}{3} \\ z_B = \dfrac{4}{3} \end{matrix}$$

Sappiamo inoltre che la retta PH è parallela al vettore normale al piano ABC $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, pertanto le sue equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = \dfrac{7}{3} + t \\ y = \dfrac{1}{3} + t \\ z = \dfrac{4}{3} + t \end{cases} \qquad t \in R$$

Equazione risolvente

Essendo $P\left(\frac{7}{3} + t; \frac{1}{3} + t; \frac{4}{3} + t\right)$ il generico punto della retta PH, imponiamo che $\overline{PH} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

$$\sqrt{\left(\frac{7}{3} + t - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + t - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + t - \frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad 3t^2 = \frac{16}{3} \quad \rightarrow \quad t = \pm\frac{4}{3}$$

Risultato

Il quarto vertice del tetraedro può assumere due posizioni : nel punto di coordinate $\left(\frac{11}{3}; \frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$, corrispondente al valore $t = \frac{4}{3}$, e nel punto di coordinate $(1; -1; 0)$, corrispondente al valore $t = -\frac{4}{3}$.