Quesito n°5 simulazione del 28 febbraio 2019

Si consideri la superficie sferica S di equazione $x^2+y^2+z^2-2x+6z=0$.
Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano π di equazione $3x-2y+6z+1=0$ e la superficie S sono secanti.
Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando π e S.

Soluzione quesito 5:

In questo quesito, è data la sfera di equazione

$$x^2+y^2+z^2-2x+6z=0$$

si chiede di determinarne il raggio e il suo centro; ricordando che l'equazione generale di una sfera è la seguente:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

applicando la regola del completamento del quadrato otteniamo

$$(x^2-2x+1)+y^2+(z^2+6z+9)-10=0$$

$$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$$

pertanto il suo centro $C(1{,}0{,}-3)$ e il raggio è $r=\sqrt{10}$.

Il piano π di equazione $3x-2y+6z+1=0$ è secante la sfera se la sua distanza dal centro C della sfera è minore del raggio r:

$$d(C, piano\ \pi)=\frac{|ax_c+by_c+cz_c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|3\cdot 1+6\cdot(-3)+1|}{\sqrt{9+4+36}}=\frac{14}{7}=2<\sqrt{10}$$

Intersecando la sfera con il piano secante π si ottiene per sezione una circonferenza il cui raggio r' si determina applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo avente per ipotenusa il raggio r della sfera e per cateti il raggio r' della circonferenza e la distanza d tra il centro della sfera e il piano π:

$$r'=\sqrt{r^2-d^2}\ \sqrt{\sqrt{10}^2-2^2}=\sqrt{6}$$