PROBLEMA 1 suppletiva-PNI-2001

Le misure *a, b, c* dei lati di un triangolo ABC sono in progressione aritmetica di ragione k.

a) Si esprima, in funzione di k, il raggio *r* della circonferenza inscritta nel triangolo;

b) si stabilisca il valore di k per il quale *r* è massimo;

c) si fissi nel piano del triangolo un conveniente sistema di assi cartesiani , ortogonali e monometrici, e, per il valore di k determinato in b), si scrivano le coordinate dei vertici del triangolo ABC nonché le equazioni delle circonferenze, inscritta e circoscritta, a ABC;

d) si calcoli il rapporto tra i volumi delle due sfere di cui le circonferenze, inscritta e circoscritta, sono sezioni diametrali.

SOLUZIONE

Punti a) e b)

La richiesta del primo punto va interpretata nel modo seguente:

- Se le misure dei lati di un triangolo sono in progressione aritmetica di ragione k, è possibile esprimere la variabile r , $raggio\ del\ cerchio\ inscritto$, in funzione di due sole variabili, la misura di un lato e la ragione k.
- Indicando con a la lunghezza assegnata, le lunghezze dei tre lati possono essere rappresentate dalle seguenti terne

$$(a, a+k, a+2k) \quad (a-k,\ a,\ a+k) \quad (a-2k,\ a-k,\ a)$$

- In corrispondenza di ciascuna delle tre terne precedenti si può determinare una funzione di due variabili $\boldsymbol{r(a,k)}$ il cui andamento va studiato supponendo costante, ovvero assegnato, il valore di a e facendo variare k.
- Si determini il valore massimo di ciascuna funzione, si confrontino i risultati e si determini la terna dei lati per cui il raggio del cerchio inscritto assume il massimo valore

USO DEL SOFTWARE DI GEOMETRIA DINAMICA GEOGEBRA

)Osserviamo, con l'aiuto di un software di Geometria dinamica, l'andamento della funzione $r(k)$ in ciascuno dei tre casi.

Come punto di partenza consideriamo un triangolo equilatero ABC di lato a (progressione aritmetica con $k = 0$).La misura del raggio del cerchio in esso inscritto è $\frac{\sqrt{3}}{6}\ a$.

Lasciando invariata la lunghezza di un lato, si fa variare la lunghezza degli altri due in modo che i tre lati formino una progressione aritmetica di ragione k.

Facendo variare i valori di k, tramite uno slider, si osserva la traccia lasciata dall'incentro G del triangolo a partire dalla posizione O nel triangolo equilatero. La distanza di G dal lato BC corrisponde alla lunghezza del raggio del cerchio inscritto

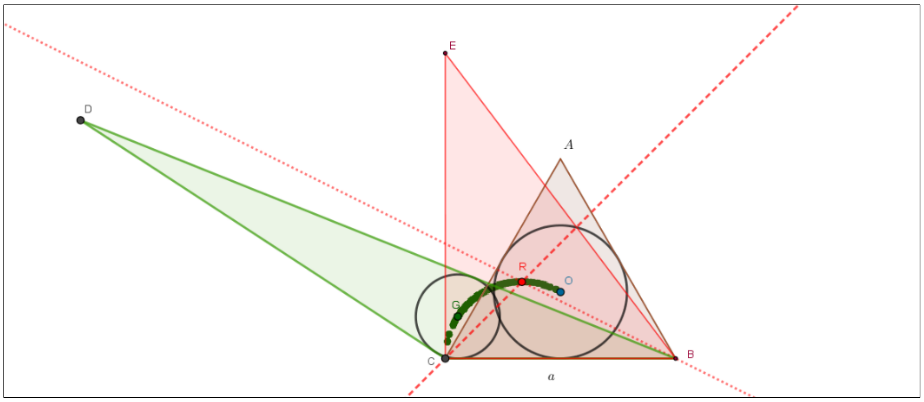
Primo caso .

Lasciando invariata la lunghezza a del lato BC e aumentando gli altri due, rispettivamente, di k e di $2k$, si ottiene

$$b = a + k \quad c = a + 2k$$

Per l'esistenza del triangolo devono essere soddisfatte le condizioni

$$b > 0\ ,\ c > 0 \quad k \geq 0 \qquad\qquad c < a + b \ \rightarrow a + 2k < 2a + k \rightarrow k < a$$



Si osserva che la lunghezza del raggio del cerchio inscritto inizialmente cresce, raggiunge il valore massimo in corrispondenza del valore $k = \frac{a}{3}$ e poi decresce.

Il valore massimo corrisponde al caso in cui $G \equiv R$, incentro del triangolo rettangolo di lati $a, \frac{4}{3}a, \frac{5}{3}\ a$.

In corrispondenza il raggio del cerchio inscritto assume il valore $\boldsymbol{r = \frac{a}{3} > \frac{\sqrt{3}}{6}\ a}$

[Confronta Soluzione Quesito1- Europa 2011]

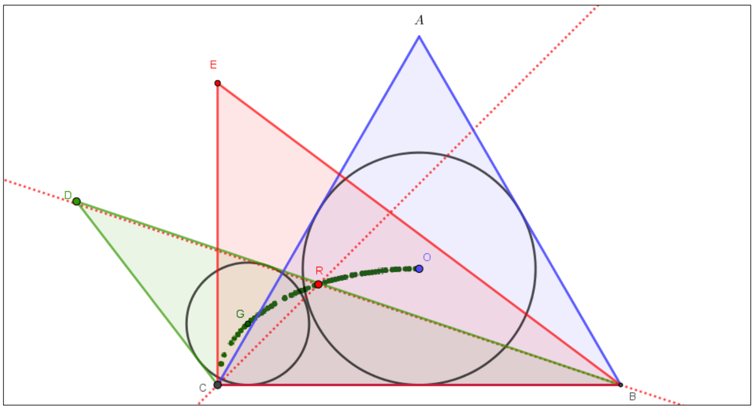
Secondo o caso .

Lasciando invariata la lunghezza di un lato si pone

$$b = a - k \quad con \;\; k < a \qquad e \qquad c = a + k$$

Si impone la condizione di esistenza del triangolo

$$b > 0, \;\; c > 0 \;\; , k \geq 0 \qquad c < \; a + b \;\; \rightarrow \; a + k < \; 2a - k \rightarrow \; k < \; a/2$$



Osserviamo che in questo caso le posizioni dell'incentro indicano che il raggio del cerchio inscritto va sempre decrescendo; pertanto, il valore massimo corrisponde al valore iniziale $\boldsymbol{r(0)} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,\boldsymbol{a}$

In questo caso il triangolo diventa rettangolo quando $\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{a}}{4}$**=**$\boldsymbol{r} < \frac{\sqrt{3}}{6}\,\boldsymbol{a}$

Terzo caso

Lasciando invariata la lunghezza a del lato BC si pone

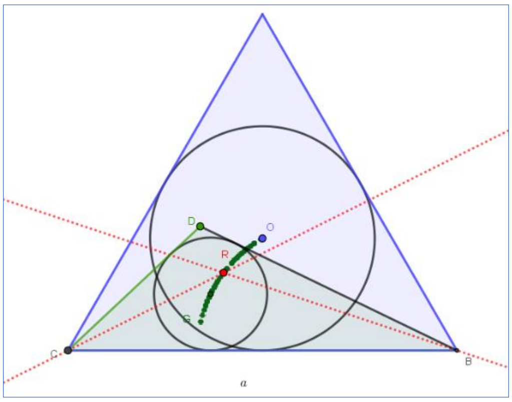
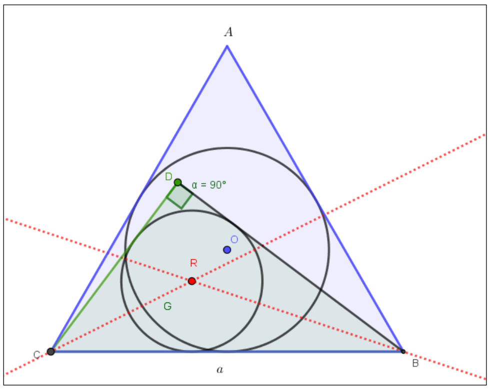
$$b = a - 2k \quad con \;\; k < a \qquad e \qquad c = a - k$$

Si impone la condizione di esistenza del triangolo

$$b > 0, \;\; c > 0 \;\; , k \geq 0 \qquad a < c + b \;\; \rightarrow \; a < \; 2a - 3k \rightarrow \; k < \; a/3$$

Osserviamo che anche in questo caso le posizioni dell'incentro indicano che il raggio del cerchio inscritto va sempre decrescendo; pertanto, il valore massimo corrisponde al valore iniziale $\boldsymbol{r(0)} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,\boldsymbol{a}$.

In questo caso il triangolo diventa rettangolo quando $\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{a}}{5}$**=**$\boldsymbol{r} < \frac{\sqrt{3}}{6}\,\boldsymbol{a}$

Dopo aver avuto una conferma dei risultati per via analitica possiamo concludere che

Fissato il valore $\boldsymbol{a}$ per la lunghezza di un lato, il triangolo con i lati i progressione aritmetica in cui si ha il massimo valore del raggio del cerchio inscritto è il triangolo rettangolo di lati

$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{a}}{3}, \boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{ovvero}\quad \boldsymbol{a}, \frac{4}{3}\boldsymbol{a}, \frac{5}{3}\ \boldsymbol{a}.$$

SOLUZIONE ANALITICA

Primo caso

Le misure dei lati sono a , $a+k$, $a+2k$ con $0<k<a$

Il valore del semiperimetro $p=\frac{a+b+c}{2} \rightarrow p(a,k)=\frac{3a+3k}{2}$

Pertanto

$$Area = S(a,k) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{3a+3k}{2}\left(\frac{a+3k}{2}\right)\left(\frac{a+k}{2}\right)\left(\frac{a-k}{2}\right)}$$

$$=(a+k)\sqrt{\frac{3}{16}(a+3k)(a-k)} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a+k)\sqrt{(a+3k)(a-k)}$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})=\frac{S(a,k)}{p}=\frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{(a+3k)(a-k)} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{6}}\sqrt{-\boldsymbol{3k^2}+\boldsymbol{2ak}+\boldsymbol{a^2}})$$

$$0 \leq k < a$$

Il valore di k che rende massimo $r(k), pensato\ funzione\ della\ sola\ variabile\ k,$ è lo stesso che massimizza il radicando $f(k) = -\boldsymbol{3k^2}+\boldsymbol{2ak}+\boldsymbol{a^2})$ e può essere determinato mediante il metodo delle derivate o anche per via elementare (ascissa del vertice di una parabola con la concavità verso il basso).

$f'(k) = -6k + 2a = 0 \;\rightarrow\; k = \frac{a}{3} \quad con\; f''(k) = -6 \;\; sempre\; negativa$

Per il punto di massimo si ha $\boldsymbol{k = \frac{a}{3}} \rightarrow \boldsymbol{r = \frac{a}{3}}$**, valori che corrispondono a un triangolo rettangolo**

Secondo caso

Le misure dei lati sono

$a - k \;\;,\; a \;,\; a + k \qquad con \qquad 0 < \; k < \frac{a}{2}$

$p = \; semiperimetro = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}a$ indipendente da k (triangoli isoperimetrici)

Pertanto

$$Area = S(a,k) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \; = \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{a}{2} - k\right)\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} + k\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{16}a^2(a^2 - 4k^2)} \; = \frac{\sqrt{3}}{4}a\sqrt{a^2 - 4k^2}$$

$$\boldsymbol{r = r(a,k) = \frac{S(a,k)}{p} = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{a^2 - 4k^2}} \qquad 0 < \; k < \frac{a}{2}$$

Considerando costante il valore di a, osserviamo che $\boldsymbol{r(k)}$, è una funzione decrescente, come si può dedurre per via elementare essendo rappresentata , in un opportuno riferimento cartesiano dall'arco di ellisse di equazione

$12\, y^2 + 4x^2 = a^2$, appartenente al primo quadrante

Si può anche osservare che la derivata $\boldsymbol{r'(k)} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{-4k}{\sqrt{a-4k^2}}}$ è negativa nell'intervallo $0 < \; k < \frac{a}{2}$

Il valore massimo di r si trova pertanto in corrispondenza di $\boldsymbol{k = 0}$ (triangolo equilatero)→ $\boldsymbol{r = \frac{\sqrt{3}}{6}a}$

Terzo caso

Le misure degli altri due lati sono $a - 2k,\; a - k, \quad con \qquad 0 < \; k < \frac{a}{3}$

Il valore del semiperimetro è

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3a-3k}{2}$$

Pertanto

$$Area = S(k) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \; = \sqrt{\frac{3a-3k}{2}\left(\frac{a+4k}{2}\right)\left(\frac{a-k}{2}\right)\left(\frac{a-3k}{2}\right)}$$

$$=(a-k)\sqrt{\frac{3}{16}(a+4k)(a-3k)} \; =\frac{\sqrt{3}}{4}(a-k)\sqrt{(a+k)(a-3k)}$$

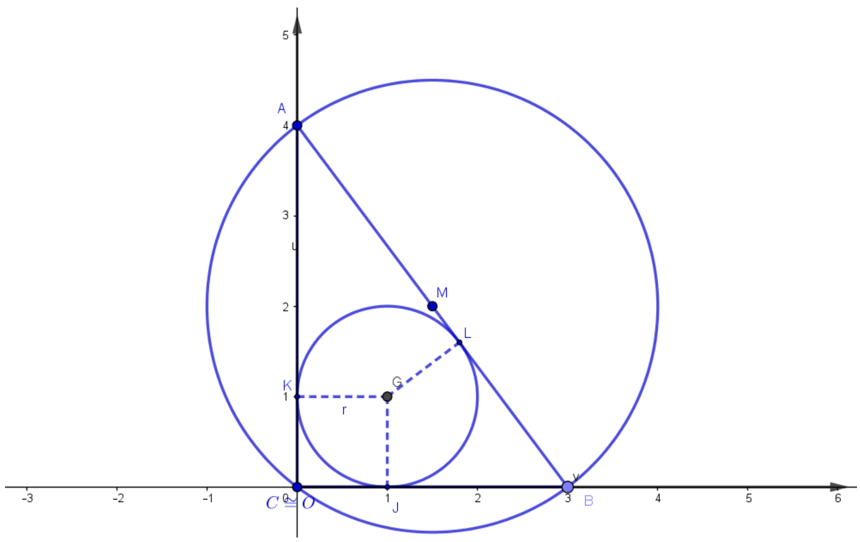
$$\boldsymbol{r = r(k)} = \frac{S(k)}{p} = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{(a+4k)(a-3k)} \;\; = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{6}}\sqrt{\boldsymbol{-3k^2 - 2ak + a^2}} \quad \boldsymbol{0 \le k < \frac{a}{3}}$$

La funzione $\boldsymbol{r(k)} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{6}}\sqrt{\boldsymbol{-3k^2 - 2ak + a^2}}$ $\quad \boldsymbol{con\ \ 0 \le k <} \frac{a}{3}$ è una funzione decrescente, come si può dedurre osservando che la derivata

$\boldsymbol{r'(k)}=\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{6}}\frac{\mathbf{-3k-a}}{\sqrt{\boldsymbol{-3k^2-2ak+c^2}}}$ è negativa nell'intervallo considerato

Il valore massimo di r si trova pertanto in corrispondenza di $\boldsymbol{k = 0}$ (triangolo equilatero)→ $\boldsymbol{r} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{6}}\mathbf{a}$

Punto c)



Si sceglie un riferimento cartesiano in cui l'asse x coincide con la retta CB che contiene il cateto minore e l'asse y coincide con la retta del cateto maggiore.

Scegliendo come unità di misura la lunghezza del raggio del cerchio inscritto, le coordinate dei vertici del triangolo sono

$$\boldsymbol{A(0,4)}, \qquad \boldsymbol{B(3,0)}, \qquad \boldsymbol{C(0,0)}$$

Il centro del cerchio inscritto è $G(1,1)$ e quello del cerchio circoscritto, punto medio dell'ipotenusa, è $M(\frac{3}{2},2)$.

I raggi hanno lunghezza 1 e $\frac{5}{2}$ rispettivamente.

Equazione della circonferenza inscritta

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1 \rightarrow \boldsymbol{x^2+y^2-2x-2y+1=0}$$

Equazione della circonferenza circoscritta

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4} \rightarrow \boldsymbol{x^2+y^2-3x-4y=0}$$

Punto d)

Il rapporto dei volumi delle due sfere è uguale al cubo del rapporto dei due raggi; pertanto, è uguale a $\frac{8}{125}$