Soluzione di Adriana Lanza

QUESITI 1) e 3)   SESSIONE ORDINARIA PNI 2010

1)Sia *p(x)* un polinomio di grado *n.* Si dimostri che la sua derivata *n*-esima è $p^{(n)}(x) = n!\, a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.

A) Cominciamo col dimostrare che la derivata n-esima di $f(x) = x^n$ è n!

Infatti dalla regola di derivazione della potenza con esponente intero si deduce che ,ad ogni derivazione , l'esponente diminuisce di un'unità e il coefficiente viene moltiplicato per l'esponente stesso

$f'(x)= nx^{n-1}$ $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ $f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$f^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}$

Se k=n si ottiene n!

B) Se deriviamo n volte un generico polinomio di grado n

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

ad ogni passo si elimina l'ultimo termine, che essendo una costante ha derivata nulla, finché resterà $n!a_n$

3) Sia *r* la retta d'equazione *y* = *ax* tangente al grafico di *y* = e^x. Quale è la misura in gradi e primi sessagesimali dell'angolo che la retta *r* forma con il semiasse positivo delle ascisse?

Se *a =0 la retta r è asintoto orizzontale per la curva esponenziale*

Per determinare il valore di **a≠0** impostiamo un sistema , imponendo che la curva e la retta si incontrino in un punto $P(x,e^x)$ e che in quel punto la derivata della funzione e^x sia uguale ad $\boldsymbol{a}$

$$\begin{cases} ax = e^x \\ a = e^x \end{cases}$$

Il sistema ammette le soluzioni

x=1   *a =e*

L'angolo che r forma con il semiasse positivo delle ascisse sarà

α = arctan (e) di ampiezza 69°48'.